

R. Cuntze, R. Deska und B. Szelinski, Karlsfeld
R. Jeltsch-Fricker und S. Meckbach, Kassel
D. Huybrechts und J. Kopp, Aachen
L. Kroll, Dresden
S. Gollwitzer und R. Rackwitz, München

**Neue Bruchkriterien
und Festigkeitsnachweise
für unidirektionalen
Faserkunststoffverbund
unter mehrachsiger
Beanspruchung
– Modellbildung
und Experimente –**

BMBF-Förderkennzeichen: 03N8002
Abschlußbericht 1997

Cuntze, R. et al.

Neue Bruchkriterien und Festigkeitsnachweise für unidirektionalen Faserkunststoffverbund unter mehrachsiger Beanspruchung – Modellbildung und Experimente –

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 5 Nr. 506. Düsseldorf: VDI Verlag 1997.
262 Seiten, 167 Bilder, 29 Tabellen.

Für die Dokumentation: Faserkunststoffverbund – Statische Festigkeit – Bruchkriterien – Mikromechanik – Makromechanik – Dimensionierung

Zuverlässige Festigkeitsnachweise setzen zutreffende Bruchkriterien voraus. Letztere sollen dazu verhelfen, im wesentlichen mit den immer notwendigen, relativ einfach zu ermittelnden Basis-Festigkeitskriterien die Bewertung eines beliebigen Spannungszustandes zu ermöglichen. Die physikalisch begründeten Bruchkriterien dieses Berichtes erfüllen diese Anforderungen. Damit werden die Unzulänglichkeiten der zur Zeit gebräuchlichen Bruchkriterien für den Zwischenfaserbruch in Schichten aus unidirektionalem Faserkunststoffverbund überwunden, so daß Bauteile „mechanisch bewußter“ und entsprechend zuverlässiger dimensioniert werden können. Die Verifizierung der Bruchkriterien ist für die ebene Beanspruchung der klassischen Laminattheorie durch Experiment erfolgt. Für räumliche Beanspruchung wurde – im Gegensatz zu den gebräuchlichen Bruchkriterien – mit neuartigen Versuchen schon eine Teilverifizierung erzielt.

Die Reihen der FORTSCHRITT-BERICHTE VDI:

- | | |
|--|---|
| 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente | 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik |
| 2 Fertigungstechnik | 13 Fördertechnik/Logistik |
| 3 Verfahrenstechnik | 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik |
| 4 Bauingenieurwesen | 15 Umwelttechnik |
| 5 Grund- und Werkstoffe | 16 Technik und Wirtschaft |
| 6 Energieerzeugung | 17 Biotechnik/Medizintechnik |
| 7 Strömungstechnik | 18 Mechanik/Bruchmechanik |
| 8 Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik | 19 Wärmetechnik/Kältetechnik |
| 9 Elektronik | 20 Rechnerunterstützte Verfahren
(CAD, CAM, CAE, CAP, CAQ, CIM, ...) |
| 10 Informatik/Kommunikationstechnik | 21 Elektrotechnik |
| 11 Schwingungstechnik | |

© VDI Verlag GmbH · Düsseldorf 1997

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Fotokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, im Internet und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-952X

ISBN 3-18-350605-X

VORWORT

Dieser Fortschrittsbericht enthält die Ergebnisse eines Gemeinschaftsvorhabens, dessen Ziel es war, den rechnerischen Festigkeitsnachweis von ein- und mehrschichtigen Bauteilen aus unidirektionalem (UD) Faserkunststoffverbund (FKV) bzgl. des Einflusses von Zwischenfaserbruch (ZFB) zu verbessern.

Im Folgenden wird zuerst auf die dem Vorhaben zugrundeliegenden ZFB-Hypothesen von Hashin/Puck und deren Modellannahmen eingegangen. Diese basieren auf den Gedanken von Mohr und Coulomb und sind auf spröden FKV anwendbar. Die Aufgabe des Vorhabens bestand darin, die ursprüngliche Formulierung von Puck [Puc92] inhaltlich weiterzuentwickeln und den "Hashin/Puck-Ansatz" für ausgewählte Spannungskombinationen experimentell weitestgehend zu verifizieren. Dazu wurde das auf die Bruchebene bezogene ZFB-Festigkeitskriterium überprüft, indem verschiedene Probekörper aus UD-FKV eben (2D) und räumlich (3D) beansprucht wurden.

Bei der mathematischen Formulierung des Kriteriums wurde auf eine numerische effiziente Fassung Wert gelegt. Diese soll später in kommerzielle FEM-Programme zur FKV-Strukturanalyse eingefügt werden.

Das Kriterium gilt als verifiziert, wenn die Testergebnisse im Mittel gut abgebildet werden können und zusätzlich der Winkel der faserparallelen Bruchebene in einigen typischen Versuchspunkten belegt wird.

Das Gemeinschaftsvorhaben wurde im Rahmen eines interdisziplinären Projekts durchgeführt, wobei versucht wurde, Synergieeffekte aus der Zusammenarbeit zwischen verschiedenen Ingenieurdisziplinen und der angewandten Mathematik zu nutzen.

Mit dem neuen Kriterium werden die Unzulänglichkeiten der bekannten, zur Zeit gebräuchlichen Festigkeitskriterien für ZFB überwunden, so daß Bauteile werkstoffgerechter und damit auch zuverlässiger dimensioniert werden können.

Die in diesem Bericht zusammengefaßten theoretischen und experimentellen Ergebnisse werden nicht nur für Konstrukteure und Versuchsingenieure in der Industrie von großem Interesse sein, sondern auch neue Impulse für den Forscher an universitären Einrichtungen liefern.

DANKSAGUNG

Die Autoren bedanken sich bei den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern in den beteiligten Häusern, insbesondere den Herren Dipl.-Math. M. Gude, J. Lampl, Dr.-Ing. V. Lustig, Dr.-Ing. S. Plica, K. Strube, Dipl.-Ing. R. Troschitz und Dipl.-Ing. J. Zaun, für die geleistete Arbeit und intensive Mitwirkung, ohne die das gesteckte Ziel nicht erreicht worden wäre.

Ferner sei allen mittelbar Beteiligten für die Anregungen und Diskussionsbeiträge gedankt, die entscheidend zum Gelingen beitrugen.

Aachen, Dresden, Karlsfeld, Kassel, München im April 1997

Autoren:

- MAN: Dr.-Ing. habil. Ralf G. Cuntze, Dipl.-Ing. Rolf Deska, Dipl.-Ing. Bernd Szelinski,
Fa. MAN Technologie AG, Karlsfeld b. München
- GhK: Prof. Dr.sc.math.habil. Rita Jeltsch-Fricker, Dr. Sabine Meckbach, AG Ingenieurmathe-
matik, Universität Gh Kassel
- IKV: Dr.-Ing. Dirk Huybrechts (vormals IKV), Dipl.-Ing. Jochen Kopp, Institut für Kunststoff-
verarbeitung Aachen (Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing.habil. Walter Michaeli), Rheinisch-
Westfälische Technische Hochschule Aachen
- ILK: Dr.-Ing. Lothar Kroll, Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik (Institutsleiter: Prof.
Dr.-Ing. habil. Werner Hufenbach), Technische Universität Dresden
- RCP: Dr.-Ing. Stephan Gollwitzer, Prof. Dr.-Ing. habil. Rüdiger Rackwitz, Fa. Reliability Con-
sulting and Programs GmbH, München

Hinweis:

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wurde mit Mitteln des Bundesministers für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Technologie unter dem Förderkennzeichen 03N8002 in den Jahren 1994-1997 gefördert.

Die Gesamtprojektverantwortung lag bei Herrn Dr.-Ing. R. Cuntze. Teilprojektleiter waren Dipl.-Ing. B. Szelinski, Prof. Dr. R. Jeltsch-Fricker, Dr.-Ing. D. Huybrechts (bis Ende 1995), Dipl.-Ing. J. Kopp, Dr.-Ing. L. Kroll, Dr.-Ing. S. Gollwitzer. Prof. Dr.-Ing. Alfred Puck, Immenhausen, hat bis Mai 1995 als freier Berater mitgewirkt.

Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren. Die Verantwortlichen für die einzelnen Kapitel sind mit ihren Initialen nach der Kapitelüberschrift aufgeführt: R. Cuntze [RC], R. Deska [RD], S. Gollwitzer [SG], D. Huybrechts [DH], R. Jeltsch-Fricker [J-F], J. Kopp [JK], L. Kroll [LK], S. Meckbach [SM], R. Rackwitz [RR], B. Szelinski [BS].

Vorwort	III
Bezeichnungen	IX
1. Abkürzungen	IX
2. Symbole und Zeichen	IX
1 Einleitung	
1.1 Problemeinführung	1
1.1.1 Einsatz von Festigkeitskriterien in Auslegung und Nachweis	1
1.1.2 Grundsätzliche Betrachtungen zum Festigkeitsnachweis von SV (Laminaten)	3
1.1.3 Grundlagen zur Bruchanalyse von UD-Schicht und Schichtverbund (SV)	4
1.1.4 Ermittlung des Reservefaktors beim Festigkeitsnachweis und zug. Größen	8
1.2 Genereller Stand der FKV-Bruchkriterien	10
1.2.1 Allgemeines	10
1.2.2 Bisherige 3D-Festigkeitskriterien	12
1.2.3 Bisherige 2D-Festigkeitskriterien	14
1.3 Lösungsweg	16
1.3.1 Einführung in Pucks Wirkebene-Bruchkriterium für Zwischenfaserbruch	16
1.3.2 Probabilistische Zuverlässigkeitsbetrachtungen	21
1.3.3 2D- und 3D-Versuchstechniken sowie Erfassung von Eigenspannungen	26
2 Grundlagen der neuen ZFB-Kriterien [J-F, SM]	
2.1 Der Bruchkörper eines transversal-isotropen Werkstoffelementes	30
2.1.1 Grundbegriffe	30
2.1.2 Transformationsformeln	31
2.2 Mohrsche Bruchbedingungen	33
2.2.1 Die Hypothesen von Hashin / Mohr	33
2.2.2 Rechnerische Handhabung	34
2.2.3 Der zylindrische Ansatz	37
2.2.4 Eigenschaften des Mohrschen Bruchkörpers	40
2.3 Geometrische Deutung der Mohrschen Bruchhypothese	40
2.3.1 Der Projektionskörper als Masterkörper	40
2.3.2 Totraum	42
2.4 Die Hypothesen von Puck	43
2.4.1 Präzisierung der allgemeinen Mohrschen Bruchhypothese	43
2.4.2 Präzisierung der Mohrschen Bruchhypothese für die transv.-isotrope Ebene	44
2.5 Berücksichtigung von Eigenspannungen	45
2.6 Abhängigkeit von der Normalspannung σ_1	46
3 Modellbildung [J-F, SM]	
3.1 Vorgaben für die Modellierung	49
3.2 Starre Modelle	50
3.2.1 Einfacher parabolischer Ansatz	50

3.2.2	Parabolischer Ansatz von Puck.....	54
3.2.3	Allgemeiner parabolischer Ansatz	56
3.2.4	Der Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Raum	57
3.2.5	Der Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum	60
3.3	Elastische Modelle	63
3.3.1	Minimaler und maximaler Masterkörper	64
3.3.2	Eingrenzung des realen Bruchwinkels	67
3.4	α -Modelle.....	68
4	Datenanpassung und Sensitivitätsanalysen [SG, RR]	
4.1	Übersicht über die Methoden der Kurvenanpassung.....	70
4.1.1	Allgemeines	70
4.1.2	Theoretische Überlegungen und Qualitätskriterien der Anpassung.....	70
4.1.3	Verfahren nach dem Prinzip vom Minimum der Fehlerquadrate.	71
4.1.4	Indirekte Schätzverfahren	72
4.2	Vorstellung der für die Datenanpassung verwendeten Modelle.....	73
4.3	Vergleich und Bewertung der Modelle anhand der vorhandenen Daten.....	76
4.3.1	Verwendete Daten	76
4.3.2	Rechnerische Auswertung.....	76
4.4	Sensitivitätsanalyse für Steigungsparameter der ausgewählten Modelle	80
4.5	Bewertung der Modelle	85
5	Strukturzuverlässigkeit von FKV-Bauteilen [RR, SG]	
5.1	Einführung in die Theorie der Strukturzuverlässigkeit	88
5.1.1	Allgemeines	88
5.1.2	Zuverlässigkeitsmethode erster und zweiter Ordnung	89
5.1.3	Zusammenhang zwischen exakter Rechnung und Teilsicherheitsfaktoren.....	92
5.2	Stochastisches Modell für unsichere Größen	93
5.3	Berücksichtigung des Größeneffektes	94
5.3.1	Theorie	94
5.3.2	Das Weibullmodell für faserverstärkte Kunststoffe.....	95
5.3.3	Versuche zum Größeneffekt im Projekt und Schlußfolgerungen	96
5.4	Beispielrechnungen, Teilsicherheitsfaktoren	98
5.4.1	Zuverlässigkeitsuntersuchungen in der (σ_2, τ_{21}) -Ebene	98
5.4.2	GFK-Platte unter Scheiben- und Plattenbeanspruchung.....	102
6	Anforderungen an Versuchstechnik, Probekörper und Prüfvorrichtungen [DH, JK, LK]	
6.1	Definition der Testmatrix und der Lastpfade [LK]	105
6.2	Auswahl der Werkstoffe und Werkstoffkennwerte	106
6.3	Auswahl von Probekörpern, Probekörperfertigung.....	113
6.3.1	Existente Versuchstechnik zur Verifikation von Festigkeitskriterien.....	113
6.3.2	Konzepte zur Untersuchung von Bruchwinkeln	115
6.4	Probekörperfertigung.....	117

7	Der Zug-/Druck-Torsionsprobekörper (σ_2, τ_{21})	[LK, BS, RD, RC]	
7.1	Verifizierungsweg		121
7.2	Theoretische Untersuchungen		121
7.3	Durchführung der Z/D-T-Versuche.....		123
7.4	Versuchsergebnisse		124
7.5	Bruchwinkelmessungen am Z/D-T-Probekörper		127
7.6	Abschätzung des Einflusses der Aushärtungseigenstressen eines UD-Probekörpers		127
8	Das Querdruck-UD-Prisma (σ_2^d, θ_B^d)	[JK, DH]	
8.1	Verifizierungsweg		132
8.2	Erste Entwicklungsstufe: Geometriewahl und erste Bruchwinkelmessungen		133
8.3	Zweite Entwicklungsstufe: FEM-Optimierung, Modellparameterermittlung.....		134
8.3.1	FEM-Optimierung		135
8.3.2	Ergebnisse.....		136
8.3.3	Ermittlung von Modellparametern und Abhängigkeit der zugehörigen Werte		136
9	Der Torsionsring ($\tau_{32}, \tau_{31}, \theta_B$)	[DH, JK]	
9.1	Verifizierungsweg		139
9.2	Erste Entwicklungsstufe: Auslegung, Bruchwinkelmessung, Ergebnisdiskussion.....		143
9.3	Zweite Entwicklungsstufe: Vertiefte Analyse und Ergebnisse		145
10	Der geschichtete gerade Biegeträger ($\sigma_2, \tau_{23}, \theta_B$)	[DH, JK]	
10.1	Überlegungen zur Spannungsverteilung.....		149
10.2	Qualitative Untersuchungen		154
10.3	Erste Entwicklungsstufe: In situ laminiertes Balken.....		154
10.4	Zweite Entwicklungsstufe: Kalt verklebter Balken.....		156
10.5	Dritte Entwicklungsstufe: Querkontraktionskompat. Balken, Ergebnisdiskussion		157
11	Die Quetsch-Nut ($v_f, \sigma_{1f}, \sigma_2^d, \sigma_3^d$)	[RD, RC]	
11.1	Verifizierungsweg		160
11.2	Erste Entwicklungsstufe: Probekörperfestlegung, Analysen, Tests		160
11.3	Zweite Entwicklungsstufe: FEM-Berechnung und Ergebnisse.....		163
12	Mehraxiale Druckversuche		
12.1	Hydrostatischer Versuch ($\sigma_1^d, \sigma_2^d, \sigma_3^d$)	[LK]	166
12.2	Biaxialer Querdruckversuch mit "G-Elementen" ($\sigma_1^d, \sigma_3^d, \theta_B$)	[DH, JK]	167
12.2.1	Verifizierungsweg		167
12.2.2	Erste Entwicklungsstufe: Prüfvorrichtungskonzept und Analyse		167
12.2.3	Zweite Entwicklungsstufe: Versuche an Probekörpern mit Mulde.....		171

13 Ergebnisdarstellung

13.1 Zusammenfassung der Versuchsergebnisse	173
13.1.1 Mehrachsige Bruchspannungen, Festigkeitswerte und Modellreibungskoeffizienten	174
13.1.2 Bruchwinkel	174
13.2 Diskussion verschiedener experimenteller und theoretischer Randfragen	176
13.2.1 Begrenzung des ZFB-Körpers im biaxialen Querdruckbereich	176
13.2.2 Modellannahme "spröder" FKV	177
13.2.3 Der "Dünne-Schicht-Effekt" eingebetteter 90°-Schichten	177
13.2.4 Mikromechanische Analysen zum (σ_2, τ_{21}) -Verlauf	177
13.2.5 Abschätzung der biaxialen Querkzug-Bruchspannung $\sigma_{\perp B}^{zz}$	178
13.3 Mohrsche Bruchbedingungen für die Praxis	179
13.3.1 Allgemeines zur Auswahl der Modelle	179
13.3.2 Einfaches parabolisches Modell	180
13.3.3 Erweitertes Ausgangsmodell (inhomogen)	182
13.3.4 Parabolisches Modell nach Puck	183
13.4 Bewertung und Anmerkung zur Anwendung der Modelle	184
13.4.1 Bewertung der Modelle	184
13.4.2 Sensitivität von Reservefaktor und Bruchwinkel	185
13.4.3 Berücksichtigung von Eigenspannungen	186
13.5 Bisherige Implementierungen der neuen Bruchkriterien	186
13.6 Vergleich von Reservefaktoren verschiedener ZFB/FB-Kriterien	188
13.7 Empfehlungen zu stochastischem Modell und zu Teilsicherheitsfaktoren	190

Anhang

I Sonstige Versuche	192
I.1 Der geschichtete gekrümmte Biegeträger (σ_2^z, σ_3^z) [BS, RD]	192
I.1.1 Verifizierungsweg	192
I.1.2 Erste Entwicklungsstufe: Probekörperfestlegung, Meßschichtan., Analyse	192
I.1.3 Zweite Entwicklungsstufe: Meßschichtanordnung, Analyse, Tests	199
I.1.4 Anwendung des neuen Bruchkriteriums auf den gekrümmten Biegeträger	203
I.2 Das kerngestützte Rohr $(\sigma_2, \tau_{21}, \theta_B)$ [DH, JK]	205
I.2.1 Verifizierungsweg	205
I.2.2 Auslegung des Probekörpers	206
I.2.3 Diskussion der Ergebnisse mit einigen Schlußfolgerungen	207
II Farbtafeln	210
III Tabellen	226
IV Glossar	231

Literatur

BEZEICHNUNGEN

1. Abkürzungen

AFK	Aramidfaserkunststoff
AWV	ausgeglichener Winkelverbund
CDS	charakterist. Schädigungszustand (Characteristic Damage State)
CFK	Kohlenstofffaser-Kunststoff (Carbon-Faser-Kunststoff)
CLT	klassische Laminattheorie
CoV	siehe Variationskoeffizient V
DLL	Sichere Last (Design Limit Load), z.B. MEOP
DUL	Rechnerische Bruchlast (Design Ultimate Load) = $j_B \cdot DLL$
DMS	Dehnungsmeßstreifen
EDZ	Ebener Dehnungszustand
E-Glas	Glasfasersorte
E-Modul	Elastizitätsmodul
EP-Harz	Epoxid-Harz
ES	Einzelsschicht
ESZ	ebener Spannungszustand
FB	Faserbruch
FEA	Finite Element Analyse
FEM	Finite Element Methode
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
FORM	Verfahren zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit (First Order Reliability Method)
FPF	Erste-Schichtversagen (First Ply Failure)
FVW	Faser-Verbund-Werkstoffe (beliebige Matrix)
G-ES	gewebeverstärkte ES
GFK	Glasfaser-Kunststoff
HM	Kohlenstofffasersorte (hochmodulig)
HT	Kohlenstofffasersorte (hochfest)
ILS	interlaminare Schubspannung
ILSS	interlaminare Schubfestigkeit
KS	Koordinatensystem
LN	logarithmische Normalverteilung

MD	multidirektional
MEOP	Sicherer Innendruck (Maximum Expected Operating Pressure)
MS	Sicherheitsmarge (Margin of Safety)
NB	Normalbruch
NV	Normalverteilung
P-ES	parallelfaserverstärkte Einzelschicht = UD-Schicht
R-Glas	Glasfasersorte
REM	Rasterelektronenmikroskop
RT	Raumtemperatur
SB	Schubbruch
S-Glas	Glasfasersorte
SFORM	asymptotisch exakte Verbesserung von FORM
SV	Schichtenverbund
T	Zeit, Testdauer
UBV	Unsichere Basisvariable = streuender (stochastischer) Konstruktionsparameter
UD	unidirektional
Ü	relative Überanstrengung einer ES
UP Harz	ungesättigtes Polyesterharz
v	Variationskoeffizient ($= \sigma/\mu$) auch cov: Coefficient of Variation
W-ES	wirrfaserverstärkte ES
W-FK	Wirkebene-Festigkeitskriterien
WV	Weibullverteilung
ZFB	Zwischenfaserbruch
3D, 2D	dreidimensional, zweidimensional

2. Symbole und Zeichen

Wegen des grundlegenden Charakters des Vorhabens werden trotz des deutschen Textes auch Symbole benutzt, die sich an der heute auf dem Gebiet der Hochleistungs-Faser/Matrix-Verbunde vorherrschenden anglo-/ amerikanischen Fachsprache orientieren.

Lateinische Buchstaben:

A	Anstrengung
---	-------------

"A-Wert"	statistischer Toleranzgrenzwert mit	m	Median einer Verteilung. Steigungen der Konturen des Masterkörpers
("B-Wert")	99 % (90 %) - Quantile bei 95 % Aussagewahrscheinlichkeit /MIL-Hdbk 5/	n	Anzahl der Schichten im Schichtverbund/Laminat; Stichprobengröße, Anzahl der Versuche
A_{ik}, B_{ik}	Steifigkeitskoeffizienten der Dehn-, Koppel-, Biegesteifigkeitsmatrix des SV	$\{n\}$	Vektor der Schnittkraftflüsse
D_{ik}		P	Wahrscheinlichkeit (probability)
$D(\theta)$	Bruchgefahr = θ -abhängiger Faktor, dessen Maximum A ist (D ist nicht zu verwechseln mit dem Schadensparameter)	p	Druck
[K]	Steifigkeitsmatrix des SV mit den Untermatrizen [A], [B], [D]	p^z, p^d, p	Steigungsparameter des Masterkörpers
[Q], [S]	Steifigkeitsmatrix, Nachgiebigkeitsmatrix der "dünnen" P-ES (eben beanspruchte UD-Schicht)	P_f	Versagenswahrscheinlichkeit (probability of failure)
[T]	Transformationsmatrix	$\{q\}, q$	Vektor der deterministischen (Konstruktions-) Parameter
C_{ik}, S_{ik}	Steifigkeitskoeffizienten, Nachgiebigkeitskoeffizienten der räumlich beanspruchten UD-Schicht	$\mathfrak{R}$	Zuverlässigkeit (Reliability) $\mathfrak{R} = 1 - p_f$
d	Durchmesser	R	Festigkeit, Widerstandsmerkmal
$E_{\perp}^d$	Druck-Elastizitätsmodul der P-ES senkrecht zur Faserrichtung	R^A	Bruchwiderstand der Wirkebene der P-ES
$E_{\parallel}^z$	Zug-Elastizitätsmodul der P-ES parallel zur Faserrichtung	$R_{\perp\perp}^A$	Bruchwiderstand der Wirkebene bei Quer/Quer-Schubbeanspruchung
E_{If}	E-Modul in Faserrichtung	$R_{\perp\perp}^M, R_{\perp\perp}^P$	Modellgröße von $R_{\perp\perp}^A$ (Masterkörper, Projektionskörper)
$e_{\parallel}, e_{\perp}; e_{\perp\parallel}$	Bruchdehnungen; Bruchgleitung	$R_{\perp}^{zA}$	Bruchwiderstand der Wirkebene bei Quer-Zugbeanspruchung = Widerstand gegen Normalbruch
F	Kraft	$= R_{\perp}^z$	
f_{Res}	Reservefaktor	$R_{\parallel}^z, R_{\parallel}^d$	Zugfestigkeit, Druckfestigkeit der P-ES in Faserrichtung
f_{Str}	Streckungsfaktor = θ -abhängiger Faktor, dessen Minimum f_{Res} darstellt	$R_{\perp}^z, R_{\perp}^d$	Quer-Zugfestigkeit, Quer-Druckfestigkeit der P-ES
G	Schubmodul = $E / (2 + 2\nu)$	$R_{\perp\parallel}$	Quer/Längs-Schubfestigkeit
$G_{\parallel\perp}$	Schubmodul der P-ES parallel/senkrecht zur Faserrichtung	r,s	Realisationen der stochastischen Größen R, S
$g_i(X) = 0$	Grenzzustandsfunktion (limit-state - function) = hier Bruchbedingung, $g_i(X) \leq 0$: Versagen $g_i(X) > 0$: Überleben	S	Einwirkungsmerkmal (z.B. Beanspruchung)
j_B	"Entwurfs-Sicherheitsfaktor" Bruch (ultimate design factor of safety)	S_{11}, S_{66}	Nachgiebigkeitskoeffizienten der ES im (x_1, x_2, x_3) -KS
K	Kompressionsmodul = $E / (3 - 6\nu)$	s	Standardabweichung der Stichprobe
k	Homogenitätsgrad	t	Zeit, Dicke des SV
		V	Versagensbereich (failure domain)
		V, V_s	Variationskoeffizient der Grundgesamtheit ($v = \sigma/\mu$) und der Stichprobe ($v_s = s/\bar{x}$)

$\{x\}, \mathbf{x}$	Vektor aller Realisationen der stochastischen Festigkeit. Deren Größe ist vor ihrer Realisierung unsicher (uncertain) und nach ihrer Realisierung zufällig (random). Unsicherheit und Zufälligkeit können durch ein Verteilungsgesetz mit zugehörigen statistischen Parametern (z.B. im Fall der Gaußschen Normalverteilung durch $\mu, \sigma, f(x)$) beschrieben werden
$\bar{x}$	Mittelwert der Stichprobe

Griechische Buchstaben:

α	Ausdehnungskoeffizient (Temperatur, Feuchte), Winkelkoordinate der P-ES, Grad der Laméschen Kurve, Sensitivität in der Zuverlässigkeitsanalyse
β	Zuverlässigkeitsindex
$\varepsilon_1, \varepsilon_2; \gamma_{12}$	Dehnungen, Schiebung. Beides sind Verzerrungen der P-ES
θ	Winkel (von der x_2 -Richtung aus gemessen) zwischen der Richtung n der Flächennormalen der faserparallelen Wirkebene und der x_2 -Richtung (Bruchebene θ_B)
θ_B^d	Winkel der Bruchebene beim Bruch unter einachsiger Quer-Druckbeanspruchung $\sigma_2 = -R_{\perp}^d$
μ	Mittelwert der Grundverteilung (Gaußsche Normalverteilung)
$\mu_{\perp\perp}, \mu_{\perp\parallel}$	Modellparameter für "innere Reibung" des P-ES-Werkstoffs
$\nu_{\parallel\perp}, \nu_{\perp\parallel}$	Querkontraktionszahlen
ρ	Dichte, Artgewicht, Korrelation in der Zuverlässigkeitsanalyse
σ	Standardabweichung der Grundverteilung (Gauß), Spannungsgröße
$\{\sigma\}^{(L)}$	Spannungszustandsvektor infolge rechnerischer Bruchlast
σ_{1f}	Spannung der Fasern in deren Längsrichtung

$\{\sigma\}, \sigma$	pseudovektorielle Darstellung eines Spannungszustands (vereinfacht Spannungszustandsvektor genannt). Auf das (x_1, x_2, x_3) -KS bezogener Spannungszustandsvektor $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$ für 3D und $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})^T$ für 2D
$\{\sigma(\theta)\}$	pseudovektorielle Darstellung eines Spannungszustands. Auf das (x_1, x_n, x_t) -KS bezogener Spannungszustandsvektor $(\sigma_1, \sigma_n^A, \sigma_t, \tau_{nt}^A, \tau_{t1}^A, \tau_{n1}^A)^T$
$\{\sigma^A\}, \sigma_n$	Spannungsvektor der Wirkebene-spannungen $(\sigma_n^A(\theta), \tau_{nt}^A(\theta), \tau_{n1}^A(\theta))$. Die Spannungen auf der faserparallelen Schnittebene werden der Kürze halber als Wirkebene-spannungen bezeichnet.
$\{\sigma^{\text{Mohr}}\}$	$= \{\sigma^A\}_B$ Spannungsvektor d. Mohrschen Bruch(ebene)s spannungen
$\sigma_{II}, \sigma_{III}$	hier Haupt-Normalspannungen aus den Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$
Σ	Summenzeichen
τ_n	resultierende absolute Bruchebene-Schubspannung $(\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2)^{0,5}$
$\tau_{1 \text{ res}}$	resultierende absolute Schubspannung $(\tau_{21}^2 + \tau_{31}^2)^{0,5}$
Φ	Verteilungsfunktion der standardisierten ($\mu = 0, \sigma = 1$) Normalverteilung (Gaußsches Integral)

Sonstige Zeichen und Koordinatensysteme:

x_1, x_2, x_3	KS der transversal-isotropen UD-Schicht (P-ES) sowie des transversal-isotropen Körpers ("dicke" UD-Schicht). x_1 parallel zur Faserrichtung, x_2 parallel zur Schichtebene und senkrecht zur Faserrichtung, x_3 in Dickenrichtung der Schicht
x_I, x_{II}, x_{III}	auf die Haupt-Normalspannungen σ_{II} und σ_{III} in einem Punkt der Schicht bezogenes KS: $x_I = x_1$, x_{II} in Richtung der Haupt-Normalspannung σ_{II} , x_{III} in Richtung von σ_{III}

x_1, x_n, x_t	auf eine beliebige faserparallele Schnittebene unter dem Winkel θ im Bereich $-90^\circ < \theta \leq +90^\circ$ bezogenes KS: x_1 parallel zur Faserrichtung, x_n senkrecht (normal) zur Ebene, x_t parallel zur Ebene und senkrecht (transversal) zur Faserrichtung. Im Fall der Bruchebene: x_1, x_{nB}, x_{tB}
x, y, z	Bauteil-Koordinatensystem ($x, y : =$ Schichtebene)
$\circ$	Kennzeichnung der geometrischen Mittelfläche des SV
$(...), [...]$	allgemeine, quadratische Matrix, fett geschrieben im mathem. Teil
$\{ \}$	Vektor, fett geschrieben im mathematischen Teil
'	gedrehtes Koordinatensystem

Indizierung:

A	Wirkebene (action plane)
B	Bruch
b	Biegung
d	Druck (compression)
E	Eigenspannung
erf	erforderlich
f	Faser
hyd	hydrostatisch
i, k	laufender Index, Schichtindex
L	lastbedingt (load-induced)
M	Feuchte (moisture), Master
m	Matrix
n	nominal, Normalrichtung
R	Widerstand (resistance)
res, red	resultierend, reduziert
S	Einwirkung (stress oder strain)
s	Schub
T	Temperatur, transponierte Matrix
t	Torsion, transversale Richtung
z	Zug (engl. tension), zentral
zul	zulässig

I, II, III	Kennzeichnung von Hauptrichtungen und bruchmechanischen Modi
τ, σ	kennzeichnet bei einem Widerstand R_σ, R_τ die bruchrelevante Spannung
$\parallel, \perp, \parallel\perp$	Indizierung zur Kennzeichnung von gemessenen ES-Kenngrößen; parallel zur Faser $\parallel = 1$, senkrecht zur Faser $\perp = 2$ oder 3 sowie parallel/senkrecht
1, 2, 3	Indizierung rechnerischer Größen gemäß den Symmetrieachsen der UD-Schicht

Bei der Mehrfachindizierung gelten gemäß VDI 2014 Ort vor Ursache (v_{ij}) und Schnittebene vor Richtung (τ_{ij}). Bei Doppelindizierung gibt der 1. Index die Richtung der Flächennormalen der Wirkebene und der 2. Index die Richtung der Kraftwirkung der betreffenden Spannung an. Die Indizes für die Beanspruchungsarten Druck, Biegung, Zug, Schub werden hochgestellt, Quadrate von diesen lauten z.B. $R_\perp^{d2}, R_{\parallel\perp}^2$. Die Werte von Normalspannungen σ sind positiv, wenn es sich um Zugspannungen und negativ, wenn es sich um Druckspannungen handelt. Schubspannungen τ sind positiv oder negativ, gemäß dem gewählten KS. Festigkeiten sind jedoch immer positiv.

Kraft $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$

Spannung $\text{N/mm}^2 \equiv \text{MPa} (= 10 \text{ bar Druck})$

Kennzeichnung von Spannungszuständen:

SV, Laminat: $\{\sigma^*\} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})^T$

Schicht: - Technische Schreibweise -

$$\{\sigma(\theta)\} = (\sigma_1, \sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}, \tau_{t1}, \tau_{n1})^T$$

$$\sigma_n = \{\sigma^A\} = (\sigma_n^A(\theta), \tau_{nt}^A(\theta), \tau_{n1}^A(\theta))^T$$

$$\sigma = \{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$$

- Mathem. Schreibweise -

$$\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)^T$$

Normal- Schubspannungen spannungen

1 EINLEITUNG

1.1 Problemeinführung

Zuverlässige Festigkeitsnachweise setzen zutreffende Festigkeit(versagens)kriterien voraus. Festigkeitskriterien sollen dazu verhelfen, mit wenigen experimentell einfach zu ermittelnden Festigkeitswerten die Bewertung eines beliebigen, auch räumlichen Spannungszustandes zu ermöglichen, indem sie die zugehörigen mehrachsigen Bruchspannungszustände vorhersagen.

Dies hat in neuer Zeit zur Entwicklung von *physikalisch begründeten Festigkeitskriterien* geführt, die für den Festigkeitsnachweis eines makromechanisch "defektfreien" FKV-Bauteils herangezogen werden können. Gekerbte und angerissene oder geschädigte Bauteile werden daher nicht angesprochen. Bei der Festigkeitsanalyse wird zwischen dem *Versagensmodus* Faserbruch (FB) und dem hier vorrangig behandelten Versagensmodus Zwischenfaserbruch (ZFB) unterschieden.

Als Werkstoff wird beim FKV die Einzelschicht (ES) im Schichten-Verbund (SV) definiert. Die Einzelschicht stellt auch gleichzeitig das kleinste Berechnungselement der Strukturanalyse dar.

Warum wird ein verbessertes Festigkeitskriterium benötigt?

- Am häufigsten sind mit der *Klassischen Laminattheorie* ermittelte 2D-Spannungszustände bzgl. des "Versagensmodus ZFB" auf Schichtversagen zu untersuchen.
Die vorhandenen Festigkeitskriterien liefern aber selbst für die Bewertung solcher ebener Spannungszustände nicht immer physikalisch plausible Ergebnisse.
- Es liegen jedoch auch 3D-Spannungszustände - wie in Krafteinleitungsbereichen - vor, die schon von einigen FEM-Programmen mit vertretbarem Aufwand ermittelt werden können und für die auch eine korrekte Bewertung vorgenommen werden muß.
- Eine korrekte Festigkeitsanalyse benötigt eine korrekte Bestimmung der Sicherheitsmarge MS oder des Reservefaktors f_{Res} . Das gelingt mit einem physikalisch begründeten Kriterium
- Ein Ingenieur muß einen Versagensmodus FB oder ZFB identifizieren können. Dies ist zudem Voraussetzung für eine realitätsnahe Erfassung der Steifigkeitsabminderung nach Eintreten von ZFB für den Fall, daß eine *sukzessive Bruchanalyse* eines SV durchzuführen ist. Weiterhin erhält man Angaben, ob Entwurfsänderungen bzgl. FB oder ZFB durchzuführen sind. Je nach Versagensmodus müssen unterschiedliche Schritte eingeleitet werden.

Abschließend muß noch die Frage beantwortet werden, weshalb ein ES-Kriterium und kein SV- oder Laminat-Kriterium gesucht wird. Ein ES-Kriterium kann in die Bruchanalyse eines beliebig aufgebauten SV eingebaut werden. Ein SV-Kriterium hingegen betrachtet zwar den gesamten, aber leider nur in einem speziellen Fall vorliegenden SV und ist deshalb bei einem anderen SV-Aufbau nur unter Vorsicht anwendbar.

1.1.1 Einsatz von Festigkeitskriterien bei Auslegung und Nachweis

Der heute erreichte Stand der Technik in bezug auf den Festigkeitsnachweis von FKV-Bauteilen reicht in vielen Fällen nicht mehr aus, um befriedigende Übereinstimmung von Berechnungs- und

Versuchsergebnissen bei Prototypen oder Qualifikations-Prüflingen zu erzielen (Bild 1/1).

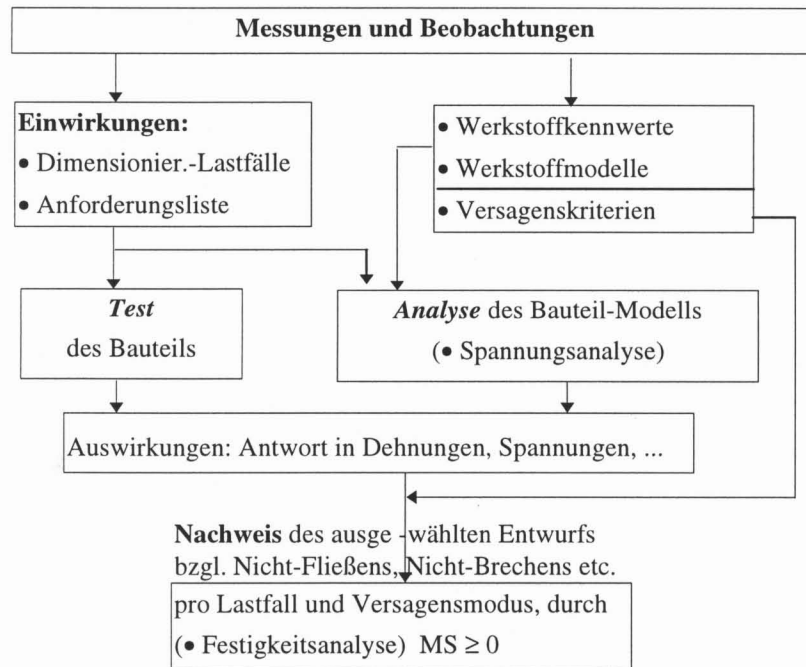


Bild 1/1:

Test und Analyse des Bauteils
zum "Nachweis ausreichender
Festigkeit"

(MS = Sicherheitsmarge
= Reservefaktor -1)

Der rechnerische Festigkeitsnachweis unterteilt sich in

- die Spannungsanalyse als Ergebnis der Strukturanalyse und in
- die Festigkeitsanalyse als Bewertung des vorliegenden Spannungszustands anhand eines geeigneten Festigkeitskriteriums,

wobei letzteres Ziel der folgenden Untersuchungen ist.

Im Bereich der Spannungsanalyse hat allgemein eine enorme Entwicklung stattgefunden, was auch eingeschränkt für den Teilbereich 3D-FKV-Spannungsanalyse gilt.

Die heute zur Verfügung stehenden, herkömmlichen (kommerziell implementierten) Festigkeitskriterien (Bild 1/2) im Bereich des FKV müssen als "nicht mehr dem Stand der Technik entsprechend" bewertet werden, wobei hier speziell die herkömmlichen Zwischenfaserbruchkriterien angesprochen sind.

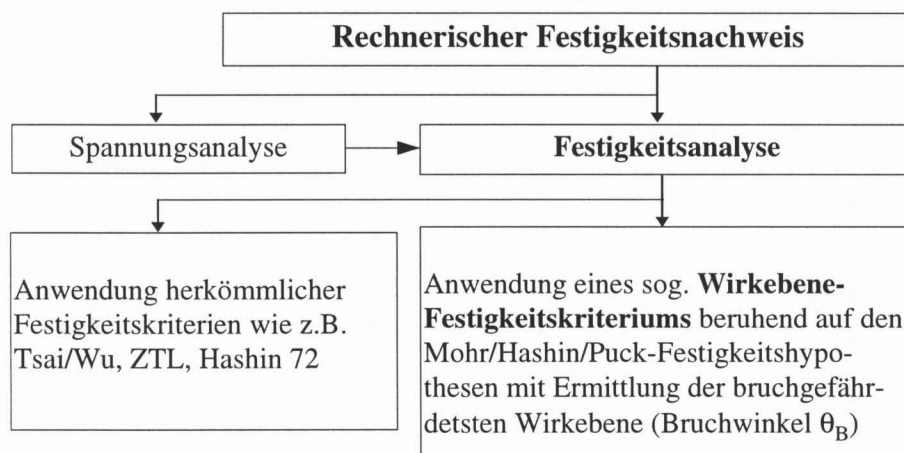


Bild 1/2:

Die neue
Festigkeitsanalyse

Während FB relativ gut vorhersagbar ist, gilt dies nicht für ZFB. Zwischenfaserbruch aber ist aus-

schlaggebend in Anwendungsfällen, in denen so dimensioniert werden muß, daß das erste Auftreten eines ZFB in irgendeiner unidirektionalen Einzelschicht (UD-Schicht $\equiv$ P-ES der VDI 2014) schon die SV-Versagensgrenze darstellt. Ein solches katastrophales Versagen, bei dem erster ES-Bruch praktisch SV-Versagen bedeutet, wurde bei Querdruck auf eine ES beobachtet. Ein derartiger Spannungszustand kann beispielsweise in der 45°- Außenschicht einer GFK-Drehrohrfeder [Puc 96a, Göt85] bei entsprechender Torsionsbeanspruchung auftreten. Falls es auf die Dichtigkeit von FKV-Behältern ohne Liner ankommt, ist die Kenntnis der ZFB-Grenze ebenfalls zwingend erforderlich.

Einen neuen Ansatz zur Verbesserung der Versagensanalyse von FKV-Bauteilen liefert Puck [Puc 92], wobei er auf einer Hypothese von Hashin [Has 80] aufbaut. Dieser Ansatz ist nicht nur bei Beanspruchung in der UD-Schichtebene anwendbar, d.h. für 2D-Probleme der klassischen Laminattheorie, sondern auch für 3D-Probleme, die zunehmend durch Finite-Element-Programme und teilweise auch noch durch analytische Verfahren gelöst werden können. Einige Anwendungsbeispiele, bei denen ein 3D-ZFB-Kriterium notwendig ist, sind LKW-Blattfeder, Hochdrucktanks, Struktur-Verbindungen und Außendruckbehälter in der Tiefsee.

Hashin/Pucks Ansatz für 3D-ZFB basiert im Sinne O. Mohrs auf der einfachen Hypothese:

**Werkstoffversagen wird von denjenigen Spannungen bewirkt,
die in der Bruchebene auftreten.**

Diese Annahme wird in keiner der herkömmlichen pauschalen Festigkeitshypothesen getroffen. Eine Weiterentwicklung dieses Ansatzes und seine Verifizierung durch mehrachsige Versuche wird daher zwangsläufig zu einer verbesserten Festigkeitsanalyse und damit einer zuverlässigeren Dimensionierung (Auslegung) und Nachweisführung in der Konstruktorspraxis von aus UD-Schichten aufgebauten SV führen. Es darf erwartet werden, daß nicht nur für *statische* sondern auch für *schwingende* Belastung hiermit ein verbesserter Festigkeitsnachweis geführt werden kann.

Mit einem solchen ZFB-Kriterium ist nach seiner Verifizierung eine bessere Erschließung des Leichtbaupotentials des FKV möglich. Dieses ist heute noch nicht genügend ausgeschöpft, was durch die noch relativ großen, *laststeigernden Entwurfs-Sicherheitsfaktoren* j für die *Dimensionierung des Entwurfs in der Auslegung* belegt wird, mit denen vorrangig Unsicherheiten bei der derzeitigen Festigkeitsanalyse berücksichtigt werden.

In Ergänzung und zur Abrundung sollen daher auch mit den modernen Methoden der Strukturzuverlässigkeit sog. Teil-Sicherheitsfaktoren ermittelt werden, so daß die Unsicherheiten der die Festigkeit beeinflussenden Parameter gezielt für sich erfaßt werden können.

1.1.2 Grundsätzliche Betrachtungen zum Festigkeitsnachweis von SV (Laminaten)

Kernstück jeder *Strukturanalyse* ist die mechanische Modellierung des zu berechnenden Bauteils (s. VDI 2014, Bl. 3). Zu ihr zählt im weitesten Umfang die Ausarbeitung *der dimensionierenden Lastfälle* und sonstiger *wesentlicher Auslegungsvorgaben*, sowie die Festlegung von Geometrie, Tragsystem und anzuwendender Berechnungsverfahren. Dazu gehört die *Auflistung der erforderlichen Nachweise*, die *Annahme möglicher Versagensmodi* (u.U. mehrere pro Lastfall, s.a. Bild 1/1)

und die Auswahl zugehöriger Versagenskriterien $F \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1$, welche die Grenzzustände beschreiben. (F = Versagensfunktion, failure function). Als *Grenzzustand* bezeichnet man jenen Last- oder Beanspruchungszustand, bei dem das Versagenskriterium $F=1$ ist, d.h., die Versagensbedingung gerade erfüllt ist. Grenzzustände sind z.B.

- Bruch, Knicken, Beulen, Delamination unter Querkraft, Querschnittkollaps z.B. durch Faserbruch oder auch ZFB, Kriechen, instabile Schädigungsausbreitung, Knittern der Sandwichdeckschicht aber auch
- Verlust der Gebrauchsfähigkeit (Schwingung, Dichtigkeit z.B. durch, Durchbiegung, Stoß/Schlag).

Eine Untergruppe der Versagenskriterien stellen somit die Festigkeits(versagens)kriterien dar, wobei diese sich wiederum in solche für die verschiedenen Versagensmodi wie Fließbeginn und Bruch unterteilen.

Gegenstand der vorliegenden Ausarbeitung ist spröder Faserkunststoffverbund. Als Grenzzustand wird deswegen lediglich der (Festigkeits-)Versagensmodus Bruch betrachtet und davon wiederum "nur" der (Sub-)Versagensmodus Zwischenfaserbruch. Die zugehörigen Festigkeitskriterien sind Bruchkriterien.

1.1.3 Grundlagen zur Bruchanalyse von UD-Schicht und Schichtverbund (SV)

Spannungen, Koordinatensysteme

Für die Anwendung der Festigkeitskriterien ist die Definition von Bauteilspannungen, Schichtspannungen und zugehöriger Koordinatensysteme der UD-Schicht (lt. VDI auch P-ES, d.h. parallelfaserverstärkte Einzelschicht genannt) von entscheidender Bedeutung (*Bilder 1/3 und 1/4*).

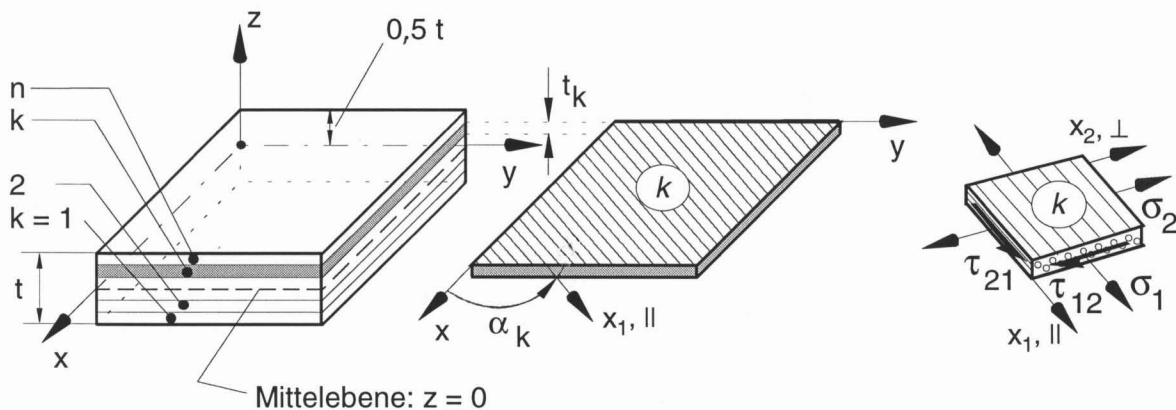
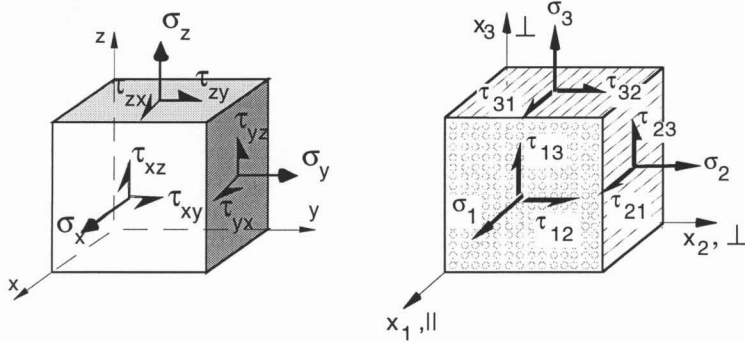


Bild 1/3: Darstellung einer eben beanspruchten P-ES im SV-KS und im lokalen KS mit den wirkenden Normalspannungen σ_1 , σ_2 und der Schubspannung $\tau_{12} = \tau_{21}$. (1. Index: Richtung der Flächennormalen, 2. Index: Richtung der betrachteten Schubspannung auf dem positiven Schnittufer. 1:= ||; 2,3:= $\perp$ zur Faserrichtung)



- SV- oder Bauteil-KS

$$\{\sigma^*\} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})^T$$

- faserparalleles KS

Ingenieurindizierung:

$$\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12})^T$$

Matrixindizierung:

$$\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)^T$$

Bild 1/4: Darstellung eines räumlich beanspruchten Werkstoffelements der P-ES im SV-KS und im lokalen KS mit einwirkenden Schichtspannungen, mit "In Schichtebene"- (intralaminaren) Spannungen (σ_1 , σ_2 , $\tau_{12} = \tau_{21}$) und "Aus der Schichtebene" (interlaminaren) Spannungen ($\tau_{31} = \tau_{13}$, $\tau_{32} = \tau_{23}$, σ_3) zusammengefaßt im sog. Spannungszustandsvektor $\{\sigma\} = \sigma$

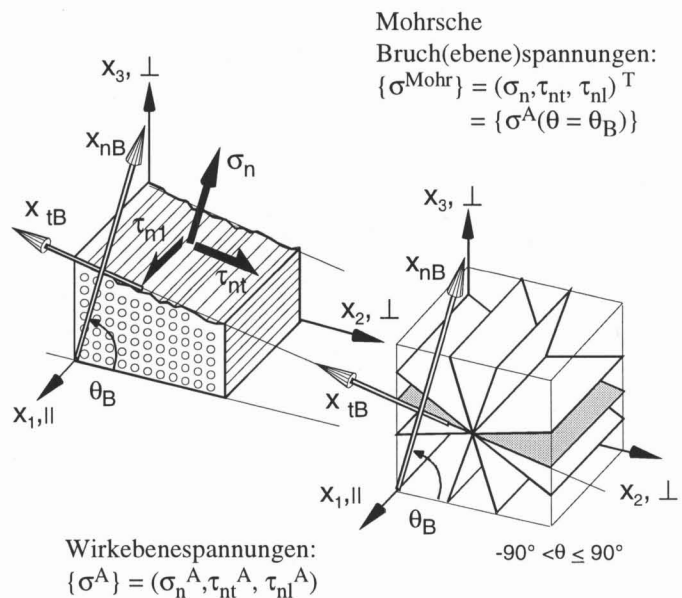
In den herkömmlichen Festigkeitskriterien werden direkt die Schichtspannungen benutzt; nach Mohr und Hashin werden jedoch auch die sog. Mohrschen Bruch(ebene)spannungen $\{\sigma^{\text{Mohr}}\}$ in der faserparallelen physikalischen Bruchebene (**Bild 1/5**) verwendet.

Ihre Werte ergeben sich über die allgemeine Transformation $\{\sigma(\theta)\} = [T(\theta)] \cdot \{\sigma\}$ des vorliegenden Schichtspannungszustandes $\{\sigma\}$ mit dem sog. Wirkebenewinkel θ um die Faserachse nach Einsetzung von $\theta = \theta_B$. Der noch unbekannte Bruchwinkel θ_B , d.h. der Wert bzgl. der *kritischen* Wirkenebene, wird mit Hilfe einer im wesentlichen auf der Mohrschen Hypothese basierenden Bruchbedingung iterativ bestimmt (s. Kapitel 2).

$$\{\sigma(\theta)\} = [T(\theta)] \{\sigma\}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_n^A \\ \sigma_t \\ \tau_{nt}^A \\ \tau_{tl} \\ \tau_{nl}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & 2sc & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & c^2 & -2sc & 0 & 0 \\ 0 & -sc & sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{bmatrix}$$

(Index A von Actionplane;
 σ_1 für ZFB entkoppelt)



Mohrsche
 Bruch(ebene)spannungen:
 $\{\sigma^{\text{Mohr}}\} = (\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{nl})^T$
 $= \{\sigma^A(\theta = \theta_B)\}$

Wirkebenespannungen:
 $\{\sigma^A\} = (\sigma_n^A, \tau_{nt}^A, \tau_{nl}^A)$

Bild 1/5: Bruchspannungen der UD-Schicht ($c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$)
 (Der Index A wird für die mathematischen Untersuchungen nicht benötigt.)

Bei Vorliegen einer Quer-/Längs-Schubspannung ist nicht die üblicherweise verwendete Schubspannung τ_{12} ZFB-relevant (der zugehörige Bruchwiderstand ist verständlicherweise größer, da τ_{12}

zu einem Bruch durch die Fasern führen würde), sondern deren zugeordnete Schubspannung τ_{21} (s. *Bild 1/4* rechts)

Eine vektorielle geometrische Darstellung des 6-dimensionalen Spannungszustands $\{\sigma\}$ ist nicht möglich. Jedoch gelingt die Visualisierung des für die Laminattheorie wichtigen Spannungszustandsvektors $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$, dessen Länge (*Bild 1/6a*) jedoch keine physikalische Bedeutung im Sinne eines resultierenden Spannungsvektors hat (s.a. [Puc96a]). Bei einem Vektor jedoch, der Spannungen auf ein und derselben Schnittebene (gemeinsame Wirkebene) repräsentiert, lassen sich diese Spannungen zu einem resultierenden Spannungsvektor zusammenfassen (*Bild 1/6b*).

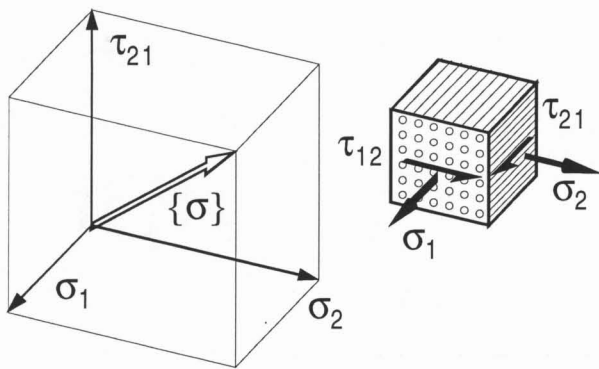


Bild 1/6a:
Darstellung des UD-Schichtspannungszustands $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})^T$ als Spannungszustandsvektor $\{\sigma\}$ (zumeist ist $\sigma_1 \gg \sigma_2$)

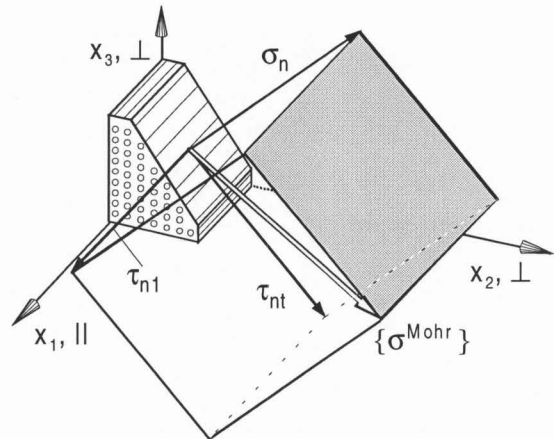


Bild 1/6b:
Darstellung der ZFB-wirksamen Spannungen als resultierender Spannungsvektor $\{\sigma^{\text{Mohr}}\}$

Versagensformen isotroper und transversal-isotroper Werkstoffe

Die bei *isotropen* Werkstoffen möglichen Versagensformen zeigt der linke Teil von *Bild 1/7*. Es sind dies der Normalbruch (NB) und der Schubbruch (SB) mit seiner duktilen und spröden Variante. Das Auftreten von NB oder SB hängt davon ab, ob der Spannungszustand duktiles oder sprödes Verhalten des Werkstoffes bedingt. Von SB darf nur gesprochen werden, falls die Spannung τ_n bruchmaßgebend ist.

Bild 1/7 gibt auch das Versagensverhalten eines *spröden transversal-isotropen* Werkstoffes bei der Bestimmung seiner Basis-Festigkeiten wieder. Ihre Anzahl erhöht sich auf 5, da eine Unterscheidung der Versagensformen FB und ZFB angezeigt ist. Auffällig ist, daß ein Versuch zur Bestimmung der Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^d$ zu einem Schubbruch quer zur Faserrichtung führt, welcher vom Schubbruch parallel zu den Fasern unter Einwirkung der Quer/Längs-Schubspannung τ_{21} zu unterscheiden ist. Nähere Erläuterungen hierzu finden sich in Kap. 6.1 (vgl. *Bild 6/3*).

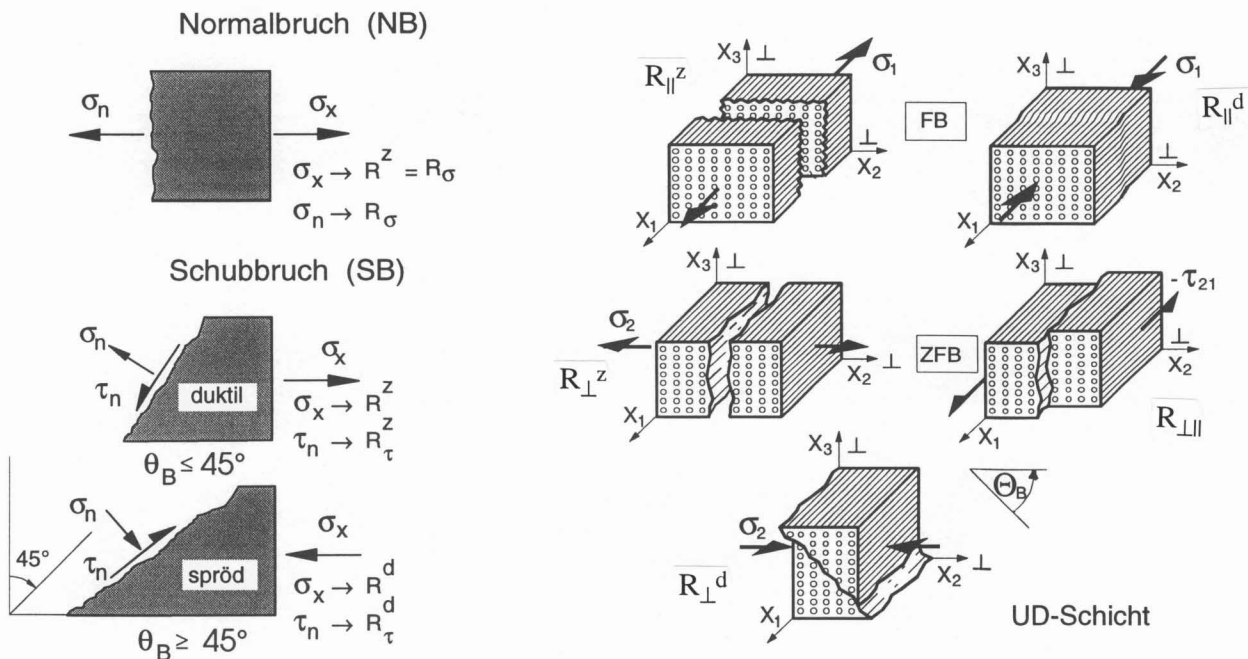


Bild 1/7: Versagensformen isotroper und spröder transversal-isotroper Werkstoffe mit Bruchebenen

Rißbildung sowie schichtenweise Spannungs- und Bruchanalyse

Für die Dimensionierung von Schichtverbunden (Laminaten) technisch hochwertiger Bauteile hat sich eine schichtenweise Festigkeitsanalyse mit Spannungsermittlung und anschließender Bruchanalyse - diese wird häufig auch "Schichtenweise Bruchanalyse" genannt - als am besten geeignete Vorgehensweise bewährt.

Das Bruchgeschehen in einem FKV-SV ist in aller Regel ein sukzessiver Vorgang. Bei verschiedenen Lasthöhen setzen Teilbrüche, meist Zwischenfaserbrüche, in den einzelnen UD-Schichten ein, woraus Kraftumlagerungen im SV resultieren. Mit zunehmender Überschreitung der ZFB-Grenze (Rißbildungsgrenze) einer UD-Schicht steigt die Anzahl der ZFB-Risse, d.h., die Rißdichte nimmt zu, bis ein "Sättigungsgrad" erreicht wird, ab dem sich die vorhandenen Risse nurmehr vergrößern. Dies hat zur Folge, daß die Steifigkeitswerte in der Ebene der betroffenen Schicht mit Ausnahme der Steifigkeit in Faserrichtung asymptotisch auf einen Endwert absinken.

Schließlich werden bei weiterer Laststeigerung Fasern in einer oder mehreren Schichten ihre Bruchgrenze erreichen, so daß Faserbruch erfolgen wird. Bei unterschiedlichen Faserrichtungen im SV können die einzelnen UD-Schichten auch ihre FB-Grenze nacheinander bei verschiedenen Lasthöhen erreichen. Erst wenn die verbleibende tragende Struktur keine Laststeigerung mehr zuläßt, erfolgt der Bruch ("Totalbruch") des Laminats. Wenn bei der rechnerischen Belastungssteigerung zum ersten Mal die FB-Bedingung erfüllt ist, sollte man jedoch die erreichte Belastung als Bruchbelastung des SV betrachten, obwohl u.U. bei einem SV mit mehr als drei Faserrichtungen auch der FB in einer ES noch nicht zur totalen Erschöpfung der Tragfähigkeit der SV führt.

Wird der ZFB durch eine Druckspannung $\sigma_2 < 0$ verursacht, kann sich die betroffene Schicht nicht durch fortschreitende Rißbildung entlasten, weil die Rißufer aufeinander gepreßt werden. Die

Risse sind in diesem Fall um etwa $+50^\circ$ oder -50° gegenüber der Schichtebene geneigt, so daß beim Aufeinanderpressen der Bruchebenen eine Keilwirkung entsteht, durch die in Dickenrichtung wirkende Sprengkräfte auf die Nachbarschichten ausgeübt werden. Dadurch können sich örtliche Delaminationen ausbilden, und es besteht die Gefahr des Knickens oder Beulens benachbarter Schichten. Ein ZFB infolge $\sigma_2 < 0$, wobei $|\sigma_2| > |\tau_{21}|$ ist, kann deshalb unter gewissen Umständen bereits den Totalbruch des SV einleiten. Diese Erfahrung wurde auch bei der Entwicklung der schon erwähnten PKW-Drehfeder aus GFK gemacht [Göt85]. Ergebnisse von Spannungs- und Bruchanalysen, die oberhalb einer solchen ZFB-Grenze liegen, dürfen deshalb nicht ohne experimentelle Abklärung zum Sicherheitsnachweis benutzt werden.

Bei höchsten Ansprüchen an die Wirklichkeitsnähe der Spannungs- und Bruchanalyse wird - sehr aufwendig - die Nichtlinearität der Spannungs-Verzerrungszusammenhänge verlaufsgetreu berücksichtigt, was bisher in kommerziellen FEM-Programmen noch nicht Eingang gefunden hat. Bei Annäherung an die ZFB-Grenzen macht sich die Nichtlinearität besonders bei Quer-Druckspannung $\sigma_2 < 0$ (bzgl. $E_\perp$) und Schubspannung τ_{12} (bzgl. $G_{\parallel\perp}$) bemerkbar, siehe [Sch89].

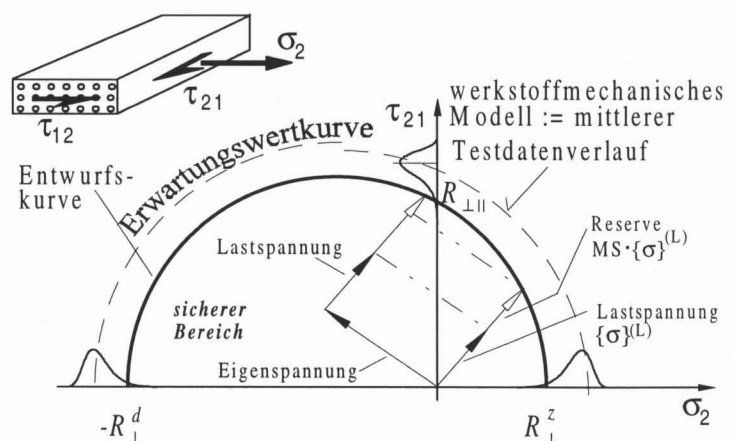
1.1.4 Definition des Reservefaktors beim Festigkeitsnachweis und zugehöriger Größen

Es kann auf mehreren Betrachtungsniveaus *ausgelegt* (dimensioniert) und das Nicht-Versagen *nachgewiesen* werden. Bei Festigkeitsnachweisen werden in der Regel im ES-Werkstoffelement auf Spannungsniveau für die einzelnen *dimensionierenden Lastfälle* die Reservefaktoren folgendermaßen definiert (*Bild 1/8*), solange keine Eigenspannungen vorliegen,

$$f_{\text{Res}} = \frac{\text{Länge des Bruchspannungszustandsvektors } |\{\sigma\}_B|}{\text{Länge des Lastspannungszustandsvektors } |\{\sigma\}^{(L)}|} \quad (1.1)$$

In der praktischen Anwendung werden die obigen Vektoren ermittelt (s.a. *Bild 1/8*) gemäß:

- $\{\sigma\}^{(L)} = j_B \cdot \text{Vektor aus den Spannungen bei sog. "Sicherer Last (Design Limit Load)"}$
- $j_B = \text{Entwurfssicherheitsfaktor für Bruch}$
- $\{\sigma\}_B = \text{gemessene oder mit Bruchbedingung abgeschätzte Bruchspannung}$
- $\{\sigma\}_B = f_{\text{Res}} \cdot \{\sigma\}^{(L)} = (1+MS)\{\sigma\}^{(L)}$
- $MS = \text{Sicherheitsmarge}$



*Bild 1/8: Lastspannungen, Eigenspannungen und Sicherheitsmargen.
Beispiel: (σ_2, τ_{21}) -Entwurfskurve einer UD-Schicht (P-ES), schematisch*

Für den Fall, daß keine Eigenspannungen vorliegen, wird der Kehrwert von f_{Res} als Anstrengung $A = 1/f_{\text{Res}}$ definiert.

Dimensionierungskennwerte

Neben korrekten Spannungen werden auch zuverlässige Dimensionierungskennwerte (design allowables, nicht mit *zulässigen Spannungen* zu verwechseln!) benötigt. Gemäß MIL-Hdbk 5 [MIL5] sind dies die sog. "A"- und "B"-Werte. Sie werden wie folgt definiert:

"A-Wert" mit 99 % Quantile (reliability $\mathfrak{R}$) bei 95 % Vertrauenswahrscheinlichkeit

"B-Wert" mit 90 % Quantile bei 95 % Vertrauenswahrscheinlichkeit.

Als Dimensionierungskennwerte für die Basis-Festigkeiten müssen zumeist "A-Werte" im Nachweis verwendet werden, welche damit einen unteren Toleranzgrenzwert (Berücksichtigung der *physikalischen* Streuungen) repräsentieren. Die Vertrauenswahrscheinlichkeit berücksichtigt die *statistische* Unsicherheit infolge der praktisch immer zu kleinen Stichprobengrößen. Zur Berücksichtigung schädigender Umwelteinflüsse werden die "A"- oder "B"-Werte weiter abgemindert.

Als Entwurfskurven werden die statistisch abgesicherten "A"- oder "B"-Wert-Bruchkurven verwendet. Ihr Verlauf, d.h. das *Modell* der Bruchkurve, wird jedoch anhand der Mittelkurve (Erwartungswertkurve) der Testdaten aufgestellt (*Bild 1/8*). Dies gilt ebenso für Bruchvorhersagen für Prüflinge, die ja in der Regel zur Modellverifizierung dienen.

Im Text unterschiedlich bezeichnet werden die Dimensionierungskennwerte R der Basis-Festigkeiten und ihre zugehörigen Mittelwerte. Letztere sind durch einen Querstrich gekennzeichnet $\bar{R}$.

Vergleichende Darstellung einiger Begriffe des Festigkeitsnachweises

Theorie und Praxis der Festigkeitsanalyse benötigen klare Begriffe und Definitionen.

Bild 1/9 zeigt zuerst die Dichtefunktion einer Basis-Festigkeit, sodann deren Verteilungs- oder "Summenfunktion", die der Bruchwahrscheinlichkeit - über der Spannung aufgetragen - entspricht. Im dritten Teilbild erkennt man, daß die Anstrengung auf R und das werkstoffmechanische Modell auf den Mittelwert $\bar{R}$ bezogen ist (vgl. auch Bild 1/8).

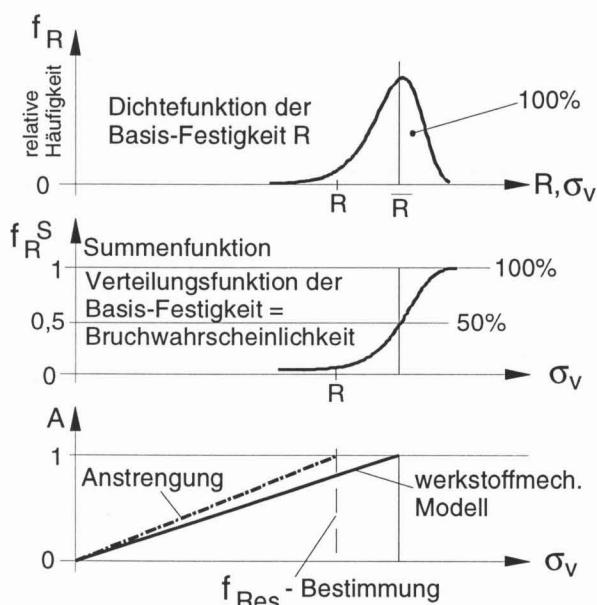


Bild 1/9:

Vergleich von Anstrengung und Bruchwahrscheinlichkeit mit Reservefaktor.

Anstrengung $\equiv$ maximale Bruchgefahr
(hier zur Vereinfachung isotropen Werkstoff genommen, schematisch)

1.2 Genereller Stand der FKV-Bruchkriterien

1.2.1 Allgemeines

Bruchmodi, Bruchkriterium und Bruchbedingung

Im SV erfahren die ES fast immer eine aus mehreren Spannungen zusammengesetzte Beanspruchung. In der Regel sind aber nur Festigkeitswerte der ES aus Versuchen mit einachsiger Zug- und Druckbeanspruchung sowie mit reiner Schubbeanspruchung bekannt. Deshalb muß aus diesen Basis-Festigkeitswerten auf die zum Versagen führenden, kombiniert auftretenden Spannungen geschlossen werden. Hierzu dienen die Festigkeitskriterien.

Da FKV mit duromerer Matrix normalerweise durch spröden Bruch versagt, sind die in Betracht kommenden Festigkeitskriterien sog. Bruchkriterien. Diese sollten, so weit wie möglich, auf einer wohlbegründeten physikalischen Vorstellung von den Bruchvorgängen, also auf einer Bruchhypothese, beruhen.

Die den in der Praxis verwendeten Bruchkriterien zugrundeliegenden physikalischen Vorstellungen vom Bruchgeschehen beschränken sich derzeit höchstens auf die Unterscheidung von FB und ZFB. Unter dem Begriff FB wird in der Regel das Versagen der Fasern durch Zerreißen infolge einer *Faser-Zugspannung* σ_{1f}^Z und das Versagen durch Schubknicken infolge einer *Verbund-Druckspannung* σ_1^d zusammengefaßt, d.h., es liegen zwei FB-Versagensmodi vor (s.a. *Bild 1/7*).

Die sich aus mikromechanischen Betrachtungen und experimenteller Erfahrung ergebende Unterscheidung von FB und ZFB ist bei der rechnerischen Untersuchung des Bruchverhaltens und der Tragfähigkeit von FKV unerlässlich, weil FB und ZFB sehr unterschiedliche Auswirkungen insbesondere auf das Tragverhalten von SV zeigen. Die gebräuchlichen Pauschal-Bruchkriterien, die FB und ZFB nicht unterscheiden, sondern nur die Information "Bruch" liefern, sind für eine wirklichkeitsnahe Bruchanalyse und eine beanspruchungsgerechte Dimensionierung ungeeignet, weil sie keine gezielten Maßnahmen zur Verbesserung des Tragverhaltens eines SV ermöglichen.

Obwohl die Unterscheidung von FB und ZFB mikromechanischen Vorstellungen entspringt, kann für die Bruchanalyse das makromechanische Modell mit homogenisierten ES weitgehendst beibehalten werden, d.h., es werden auch in die FB- und ZFB-Kriterien in der Regel *makroskopische Mittelspannungen* des Verbundes σ_1, σ_2 usw. eingesetzt. Die Unterscheidung von FB und ZFB wird dadurch ermöglicht, daß gleichzeitig voneinander unabhängige Bruchkriterien benutzt werden, solche für FB und für ZFB.

Die Spannung σ_1 beansprucht bei P-ES vorwiegend die Fasern und weniger die Matrix bzw. die Faser/Matrix-Grenzflächen. Deshalb tritt im FB-Kriterium für eine P-ES die Spannung σ_1 allein oder zumindest mit stark erhöhter Wichtung gegenüber den übrigen Spannungen auf. Beim ZFB-Kriterium der P-ES verhält es sich umgekehrt. In ihm erfahren die übrigen Spannungen eine stärkere Wichtung als σ_1 oder σ_1 fehlt in ihnen ganz.

Ein Bruchkriterium wird in der Regel folgendermaßen formuliert:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}, R_\sigma, R_\tau) = F(\{\sigma\}, \{R\}) \gtrless 1, \quad \dots \text{Bruchkriterium} \quad (1.2)$$

wobei der Vektor $\{R\}$ die Basis-Festigkeiten enthält und $\{\sigma\}$ die aktuell wirkenden Schichtspannungen erfaßt, die sich generell aus Last- und Eigenspannungen zusammensetzen.

Ergibt sich beim Einsetzen der Spannungswerte in die den Bruch charakterisierende Funktion F ein Zahlenwert $F < 1$, so tritt kein Bruch ein. Wird der Zahlenwert $= 1$, so heißt dies, daß gerade Bruch eintritt oder auch, daß der zugehörige Spannungszustand gerade noch ohne Bruch ertragen werden kann (sog. Grenzzustand). Eine Interpretation von *Bild 1/8* besagt: Wenn ein Spannungszustand einen Funktionswert $F < 1$ liefert, müßten alle Last-Spannungen σ, τ mit dem gleichen Faktor, dem sog. Reservefaktor f_{Res} multipliziert werden, damit die linke Seite des Bruchkriteriums den Wert 1 erreicht und somit die Bruchbedingung, als mathematische Formulierung der Bruchgrenzfläche,

$$F(f_{Res} \{\sigma\}^{(L)}, \{R\}) = 1 \quad \dots \text{Bruchbedingung} \quad (1.3)$$

erfüllt wird.

Die Bruchgrenzfläche stellt sich als eine Hyperfläche im maximal sechsdimensionalen Spannungsraum dar, die alle ertragbaren, d.h. nicht zum Bruch führenden Spannungszustände einhüllt.

ZFB- und FB-Grenzflächen durchdringen einander. Diejenige Bruchgrenzfläche, die vom Spannungszustandsvektor zuerst berührt wird, ist für den tatsächlich auftretenden Bruch maßgebend.

Wenn die den Bruch charakterisierende Funktion F in den Spannungen homogen vom Grad 1 ist, ist der Funktionswert von F gleich der Anstrengung $A = 1 / f_{Res}$ (s. Abschnitt 2.1.1).

Faserbruch und Zwischenfaserbruch

Bei einer P-ES ist das Bruchgeschehen wegen des einfachen geometrischen Aufbaus in erster Näherung leicht überschaubar, denn die Unterscheidung von FB und ZFB ist problemlos durch die Formulierung voneinander unabhängiger Bruchbedingungen möglich [Puc69].

Für FB in einer P-ES, insbesondere einer solchen aus Glasfaserkunststoff (GFK), wurde bisher vorwiegend die folgende, nur von σ_1 abhängige Bruchbedingung

$$F(f_{Res} \cdot \sigma_1, R_{||}) = 1$$

bzw. $\frac{f_{Res} |\sigma_1|}{R_{||}} = 1 \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} R_{||} = R_{||}^z \text{ für } \sigma_1 > 0 \dots\dots \text{Zug,} \\ R_{||} = R_{||}^d \text{ für } \sigma_1 < 0 \dots \text{Druck} \end{matrix} \quad (1.4)$

benutzt, wobei f_{Res} in der Regel weggelassen wird. Die Normal- und Schubspannungen (σ_2, τ_{21}) können nämlich den relativ geringen Wert der Matrixfestigkeiten nicht wesentlich überschreiten und bleiben deshalb im Vergleich zur Längsspannung der Fasern für die FB-Auslösung bedeutungslos.

Eine grundsätzliche mikromechanische Betrachtung zeigt aber weiter, daß es nicht auf die Verbundzugspannung σ_1^z , sondern auf die Zugspannung σ_{1f}^z der Fasern ankommt. Diese hängt nicht nur von σ_1^z , sondern wegen der Querdehnungseffekte auch von σ_2 und σ_3 ab. Dies wird berücksichtigt, indem anhand der Spannungsanalyse die faserparallele Dehnung $\epsilon_1(\sigma_1^z, \sigma_2, \sigma_3)$ des Verbundes ermittelt wird. Sodann wird für die Festigkeitsanalyse angesetzt (v_f = Faservolumenanteil)

$$\varepsilon = \varepsilon_{1f} = \sigma_{1f}^z / E_f \approx \sigma_{1f}^z / (E_{||}^z / \nu_f).$$

Um Bruchkurven aber in Verbundspannungen und Festigkeiten darstellen zu können, wird als FB-Bedingung bei Zug (zugnormalspannungsbedingter Bruch, abgekürzt Normalbruch (NB))

$$\frac{f_{\text{Res}} \cdot \sigma_{1f}^z \cdot \nu_f}{R_{||}^z} = 1 \quad (1.5)$$

empfohlen und vorgeschlagen, als Koordinate der Bruchkurve generell $\sigma_{1f} \cdot \nu_f$ zu verwenden.

Mikromechanische Untersuchungen haben ferner gezeigt, daß es sich beim FB unter *Druckspannung* σ_1^d in der Regel um "Schub-Knicken" der *Mikrostruktur* Faser handelt. Dieses kann durch gleichzeitig mit σ_1^d auftretende Schubspannungen τ_{12} und τ_{13} begünstigt werden, was in der FB-Brechbedingung entsprechend zu berücksichtigen wäre. Bei genügend steifer Matrix ist neben dem Instabilitätsversagen der Faser auch Festigkeitsversagen des isotropen oder auch anisotropen *Werkstoffs* Faser durch Schubbruch möglich.

Inwieweit die ausgeprägte Festigkeitsanisotropie von Kohlenstofffasern und Aramidfasern das Verhalten bei FB beeinflusst, ist noch nicht hinreichend geklärt.

ZFB in der P-ES wird im wesentlichen durch die Spannungen ($\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$) hervorgerufen, weil diese Spannungen direkt Matrix und Grenzfläche beanspruchen. Eine Beanspruchung durch σ_1 dehnt Fasern und Matrix in gleichem Maße. Die vergleichsweise steifen Fasern nehmen den weit überwiegenden Teil der in 1-Richtung wirkenden Kraft auf, aber auch die Matrix wird beansprucht. Wenn die Bruchdehnung der Fasern größer wäre als die der Matrix, könnte eine σ_1 -Beanspruchung zu Rissen in der Matrix führen. Einige ZFB-Bedingungen berücksichtigen diese Beanspruchung der Matrix durch einen zusätzlichen Term [Puc96]. Dieser Term hat aber bei den üblichen Matrices praktisch keinen Einfluß auf die ZFB-Anstrengung, insbesondere, wenn die Bruchdehnung $e_{||f}$ der Faser erheblich kleiner ist als die der Matrix e_m [Puc92].

- *Der nachfolgende Bericht konzentriert sich nunmehr auf ZFB-Kriterien.*
- *Der einfacheren Schreibweise wegen wird der Reservefaktor im folgenden nur im Bedarfsfall analog Gl. (1.4) in die Bruchbedingungen mit hineingeschrieben*
- *Das sog. Interphasematerial (kleiner $1\mu\text{m}$) der dicken Grenzfläche (Interface) Faser-Matrix wird als Bestandteil der Komponente Matrix mitbetrachtet.*

1.2.2 Bisherige 3D-Festigkeitskriterien

Die obigen Ausführungen haben aufgezeigt, daß für das Konstruieren mit FKV Festigkeitskriterien benötigt werden, die FB und ZFB unterscheiden. Dieses erfüllen die gängigen Kriterien - auf die nachfolgend kurz eingegangen wird - nicht, falls nicht Modifikationen abgeleitet werden.

a) Tsai/Wu Pauschal-Kriterium

Einen klassischen Vertreter der pauschalen 3D-Bruchbedingungen stellt das allseits bekannte und am weitesten verbreitete Tsai/Wu-Kriterium (zuvor in allgemeiner Form schon von Sacharov einge-

führt), dar:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad \text{mit } (i, j = 1, 2, \dots, 6). \quad (1.6a)$$

Gemäß Einsteinscher Summenkonvention und in Berücksichtigung der Symmetriebedingungen folgt

$$F_{11} \sigma_1^2 + F_1 \sigma_1 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + F_{22} \sigma_2^2 + \\ + F_2 \sigma_2 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + F_{33} \sigma_3^2 + F_3 \sigma_3 + F_{44} \tau_{23}^2 + F_{55} \tau_{13}^2 + F_{66} \tau_{12}^2 = 1 \quad (1.6b)$$

mit $F_1 = 1/R_{\parallel}^z - 1/R_{\parallel}^d$, $F_{11} = 1/(R_{\parallel}^z \cdot R_{\parallel}^d)$, $F_2 = 1/R_{\perp}^z - 1/R_{\perp}^d = F_3$, $F_{22} = 1/(R_{\perp}^z \cdot R_{\perp}^d) = F_{33}$,
 $F_{13} = F_{12}$, $F_{55} = F_{66} = 1/R_{\perp\perp}^2$, $2F_{23} = 2F_{22} - 1/R_{\perp\perp}^2$, $F_{44} = 2(F_{22} - F_{23})$. (1.7a)

Basis des Tsai/Wu-Kriteriums ist ein sog. Tensor-Polynom, da sich bei geschickter Zusammenfassung der Terme als ein Polynom in den *Spannungs*-Invarianten ausweist. Invarianten sind Kombinationen von Spannungen, die sich bei Drehung des KS um die Faserachse nicht ändern.

Der in einem (σ_1, σ_2) -Versuch zu ermittelnde, "umstrittene" Interaktionskoeffizient F_{12} streut stark und führt häufig zu einer offenen Bruchgrenzfläche, ähnlich wie bei einem Paraboloiden. Um diese zu schließen, muß gelten

$$F_{12} = \tilde{F}_{12} \sqrt{F_{11} F_{22}} \quad \text{mit den Grenzen} \quad -1 < \tilde{F}_{12} < +1. \quad (1.7b)$$

- **Vorteil:** Schnell berechenbar. Mathematische Eleganz einer geschlossenen Formel.
- **Mangel:** Vom obigen pauschalen Kriterium (1.6) erhält man keine Information zum Versagenstyp FB oder ZFB. Die üblichen einachsigen Festigkeitsversuche reichen wegen F_{12} prinzipiell nicht aus, um das Kriterium mit Eingabedaten zu versorgen. Im (σ_1^d, σ_2^d) -Bereich sind die Ergebnisse physikalisch unsinnig. Es werden die Spannungs-kombinationen (σ_2, τ_{21}) und (σ_2, τ_{31}) gleich behandelt. Eine Erklärung dieses Phänomens findet sich in Abschnitt 1.3.3.1. Eine Abbildung des realen (σ_2, τ_{21}) -Buckels ist nicht möglich (s. Kap. 7).

b) Christensens Kriteriensatz

Ein völlig andersartiges 3D-Kriterium wird von Christensen vorgeschlagen. In [Chr 88] hat er für 3D-Beanspruchungen unter Verwendung der 3D-Kontinuumsmechanik physikalisch sinnvolle Näherungen aufgestellt. Dieses ist notwendig, um eine teure Schicht-für-Schicht FE-Analyse mit einer riesigen Anzahl von Volumenelementen zu umgehen.

Auf Basis dieser Ausarbeitungen wurde von Christensen ein Festigkeitskriterium hergeleitet, das die sog. *Verzerrungs*-Invarianten $I_1^\varepsilon, J_2^\varepsilon$ nutzt,

$$\alpha \cdot I_1^\varepsilon + \beta \cdot J_2^\varepsilon + \gamma \cdot I_1^{\varepsilon^2} + \dots \stackrel{>}{<} 1, \quad (1.8)$$

und Freiwerte α, β, γ , die aus Versuchen zu bestimmen sind.

- **Vorteil:** gegenüber Tsai/Wu: Unterscheidung von FB und ZFB
- **Mangel:** Unübersichtliche Näherung für ZFB. Die Basisfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ wird nicht verwendet.

c) Knausts ZFB-Kriterium

Für physikalisch plausible ZFB-Bedingungen bei räumlichen Spannungszuständen, bei denen der Einfluß von σ_3 , τ_{23} , τ_{13} nicht vernachlässigbar ist, sind in [Kna88] etliche theoretische Grundlagen erarbeitet worden, die zu folgender ZFB-Bedingung führen:

$$\frac{1}{R_{\perp}^z \cdot R_{\perp}^d} (\sigma_2^2 - \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2 + 3\tau_{23}^2) + \left(\frac{1}{R_{\perp}^z} - \frac{1}{R_{\perp}^d} \right) (\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{R_{12}^2} (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2) = 1. \quad (1.9)$$

- **Vorteil:** Trennt ZFB von FB.

- **Mangel:** Gleichbehandlung von τ_{12} und τ_{13} . Keine Abbildung des (σ_2, τ_{21}) -Buckels.

1.2.3 Bisherige 2D-Festigkeitskriterien

Im ESDU Data Sheet no. 83014 "Failure Criteria" [ESDU] werden für Beanspruchungen in der Schichtebene acht Arten von 2D-UD-Kriterien aufgelistet und beschrieben. Diese acht Arten werden dort in drei folgenden Hauptgruppen aufgeteilt:

- **Unabhängige Bedingungen** (zwischen den σ_i oder ε_i besteht keine Interaktion) wie z.B.

Maximale Spannungen: $\sigma_1/R_{\parallel}^z = 1$ oder $\tau_{12}/R_{\perp\parallel} = 1$

maximale Dehnungen: $\varepsilon_1/\varepsilon_1^d = 1$ oder $\varepsilon_2/\varepsilon_2^z = 1$ oder $\gamma_{21}/\varepsilon_{21} = 1$. (1.10)

- **Unabhängig, teilweise (spannungs-) interaktive Bedingungen** wie z.B.

"Puck modifiziert" $\sigma_1/R_{\parallel}^z = 1$, $\sigma_1/R_{\parallel}^d = -1$

$$\sigma_2^2 (R_{\perp}^z R_{\perp}^d) + \sigma_2/R_{\perp}^z - \sigma_2/R_{\perp}^d + \tau_{12}^2/R_{\perp\parallel}^2 = 1. \quad (1.11)$$

- **Voll interaktive Bedingungen** wie z.B.

$$\text{Tsai/Hill: } (\sigma_1/R_{\parallel})^2 - \sigma_1 \sigma_2/R_{\parallel}^2 + \sigma_2^2/R_{\perp}^2 + \tau_{12}^2/R_{\perp\parallel}^2 = 1 \quad (1.12)$$

$$\text{Tsai/Wu: } F_{11} \sigma_1^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 = 1. \quad (1.13)$$

Die Auswahl dieser Bruchbedingungen geschah seitens ESDU nach den folgenden Gründen:

Verfügbarkeit, Häufigkeit des Gebrauchs und scheinbare Genauigkeit.

Zur Wahl eines Festigkeitskriteriums für den konkreten Anwendungsfall schreibt ESDU:

"Es gibt viele, verschiedene Möglichkeiten den Festigkeitsnachweis anisotroper Lamine unter kombinierter Belastung (besser Beanspruchung) anzugehen, und daher wurden viele verschiedene Versagenskriterien entwickelt. Jedes Kriterium ist zwar bis zu einem gewissen Grad durch Experimente gestützt, aber keines kann mit vollem Vertrauen universell angewendet werden. Dies ist bedingt durch die komplexen Spannungsinteraktionen inmitten des weiten Bereichs an Faser-Matrix-Kombinationen und möglicher Schichtaufbauten". Und weiter: *"Die Wahl des Kriteriums basiert üblicherweise darauf, welche Festigkeitswerte zur Verfügung stehen oder leicht erhalten werden können. Data sheet 83014 wird den Nutzer unterstützen, dasjenige Kriterium auszusuchen, das am besten zu seinen Anforderungen paßt."*

Dies bedeutet "Erlaubt ist, was gefällt", was natürlich nicht sein darf.

ZTL-Kriteriumssatz (der deutschen Luft- und Raumfahrtindustrie)

$$\text{Für FB: } \frac{\sigma_1^2}{(R_{\parallel}^z)^2} = 1 \quad , \quad \frac{\sigma_1^2}{(R_{\parallel}^d)^2} = 1 \quad (1.14)$$

$$\text{für ZFB: } F_{22}\sigma_2^2 + F_2\sigma_2 + F_{66}\tau_{12}^2 = 1 \quad \text{mit } F_{22}, F_2, F_{66} \text{ nach (1.7a).} \quad (1.15)$$

Vorstehende Gleichungen basieren auf den Ideen von Puck [Puc68], keine pauschale Gleichung zu verwenden, sondern in FB und ZFB aufzuspalten. Gl. (1.15) wäre auch aus Gl. (1.13) herleitbar, wenn eine Beeinflussung durch σ_1 unberücksichtigt bleibt.

Gl. (1.15) wird leider auch für die Kombination (σ_3, τ_{12}) benutzt, obwohl σ_3 und τ_{21} nicht spannungsinteraktiv sind:

$$\frac{\sigma_3^2}{R_{\perp}^d \cdot R_{\perp}^z} + \frac{R_{\perp}^d - R_{\perp}^z}{R_{\perp}^d \cdot R_{\perp}^z} \sigma_3 + \frac{\tau_{12}^2}{R_{\perp}^2} = 1 \quad (1.16)$$

Nur σ_2 und τ_{12} (besser τ_{21}) haben dieselbe Wirkebene.

Eine weitere Unverträglichkeit mit der Physik lässt sich anhand des nachfolgenden Bildes 1/10 demonstrieren, welches die bekannte ZFB-Versagenskurve in der Schichtebene zeigt (Gl. (1.15)).

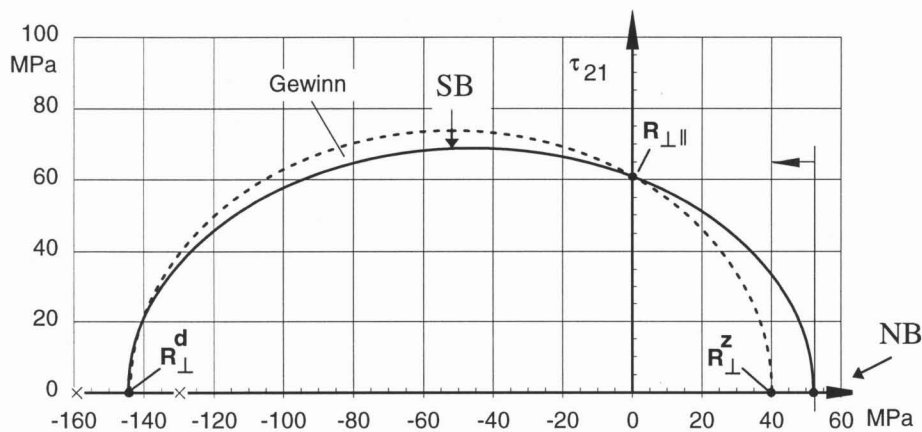


Bild 1/10:

(σ_2, τ_{21}) -ZFB-Versagenskurve
(schematisch)

- **Vorteil:** Trennt FB und ZFB.

- **Mangel:** Die Spannungen σ_2 und σ_3 sind gleich bewertet. Es ergibt sich dieselbe Anstrengung für (σ_2, τ_{21}) und (σ_3, τ_{21}) , falls $\sigma_2 = \sigma_3$, was - physikalisch gesehen - nicht richtig sein kann. Bildet die (σ_2, τ_{21}) -Kurve nicht ausreichend gut ab.

Eine Absenkung des Zugfestigkeitswertes $R_{\perp}^z$ bewirkt - als Folge der Interpolation - eine Anhebung der Festigkeit des mehrachsigen Spannungszustandes im σ_2^d -Bereich. Dies kann nicht zutreffen, weil zwischen den *Bruchtypen* Normalbruch (NB) und Schubbruch (SB) keine Spannungsinteraktion denkbar ist (Bild 1/10).

Herrmanns ZFB-Kriteriumssatz

Für die eben beanspruchte UD-Schicht hat Herrmann [Her82] - ausgehend von der Versagensursache Haftbruch - mit mikromechanischen Modellen den nicht-symmetrischen, sondern schiefen

Buckel im σ_2^d -Bereich der ZFB-Versagenskurve modelliert (Bild 1/10a). Er teilt die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve in drei Bereiche mit den zugehörigen Bruchbedingungen auf:

$$\sigma_2 \geq 0: \quad \left(\frac{R_{\perp}^z}{R_{\perp\parallel}} - 1 \right) \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(2 - \frac{R_{\perp}^z}{R_{\perp\parallel}} \right) \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^z} \right) + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1 \quad (1.17)$$

$$\sigma_2 \leq \sigma_2 < 0: \quad \text{analog Gl. (1.17), nur } R_{\perp}^z \rightarrow \tilde{R}_{\perp}^z \text{ auszutauschen} \quad (1.18)$$

$$-R_{\perp}^d \leq \sigma_2 < \sigma_2: \quad -\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^d} + \frac{\tau_{21}^2}{(R_{\perp}^d)^2} = 1, \quad (1.19)$$

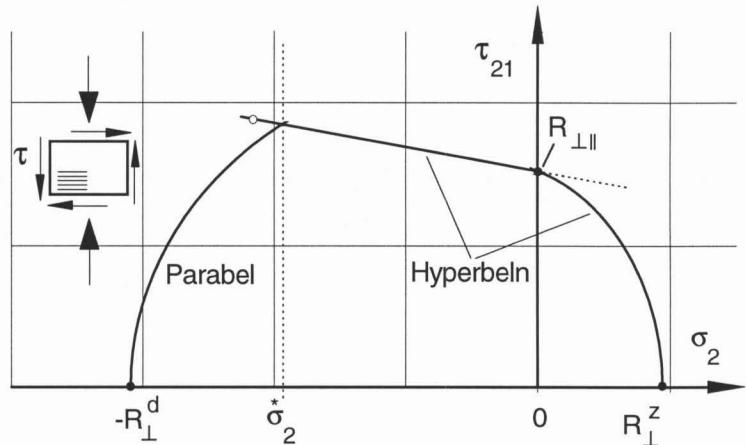
wobei

$$\tilde{R}_{\perp}^z = \frac{R_{\perp\parallel}(1,9R_{\perp}^z - R_{\perp\parallel})}{R_{\perp\parallel} - 4,5R_{\perp}^z} + R_{\perp\parallel}$$

(GFK-Beispiel ausgewertet).

Bild 1/10a:

Herrmanns (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve



- **Vorteil:** Weitgehend unabhängige Beschreibung der durch $R_{\perp}^z$, $R_{\perp\parallel}$ und $R_{\perp}^d$ charakterisierten Bruchbereiche. Realistische Testdatenabbildung.

- **Mangel:** Erfassung des räumlichen Schichtspannungszustands noch nicht möglich.

1.3 Lösungsweg

1.3.1 Einführung in Pucks Wirkebene-Bruchkriterium für Zwischenfaserbruch

1.3.1.1 Motivation

Die bei räumlichen Spannungszuständen gebräuchlichen ZFB-Kriterien sind lediglich Interpolations-Polynome und gestatten keine Aussage darüber, in welcher faserparallelen Ebene der ZFB erfolgt. Deshalb müssen z.B. die Spannungscombination τ_{21} und σ_2 und die Kombination von τ_{21} und σ_3 für die Werkstoffanstrengung ("Bruchgefahr") als gleichwertig angesetzt werden, obwohl leicht einzusehen ist, daß die Kombination τ_{21} mit σ_2 die gefährlichere ist, weil beide Spannungen in der gleichen Ebene wirken. Die Wirkebene von σ_3 ist hingegen um 90° gegen die Wirkebene von τ_{21} versetzt, so daß diese beiden Spannungen bei der Bruchauslösung nicht direkt zusammenwirken können.

Diese Unzulänglichkeiten der ZFB-Kriterien, die teilweise zu physikalisch nicht akzeptablen Ergebnissen führen, werden überwunden, in dem ein auf die Wirkebene der Spannungen bezogenes ZFB-Kriterium nach [Has 80] und [Puc 92] theoretisch und experimentell weiterentwickelt und für

die numerische Bearbeitung erschlossen wird. Dabei sei nicht verkannt, daß auch die bisherigen FB-Kriterien noch gewisse, allerdings weniger gravierende Unzulänglichkeiten aufweisen. Auch weil in Hochleistungs-FKV in aller Regel ZFB vor FB erfolgt, muß das ZFB-Verhalten eines Werkstoff-Probekörpers zuerst geklärt werden, bevor FB-bedingtes Versagen experimentell sauber untersucht werden kann. Dies kann nur bei Verwendung physikalisch begründeter Bruchkriterien wie dem sog. *Wirkebene-Bruchkriterium* gelingen.

1.3.1.2 Generelle Formulierungen

Basis für die Entwicklung des Wirkebene-Festigkeitskriteriums von Puck war O. Mohrs Hypothese für spröde, isotrope Werkstoffe (1900) und Z. Hashins Erweiterung (1980) dieser Idee für die P-ES (UD-Schicht). Beide werden im folgenden Abschnitt im Überblick zitiert und um die Hypothesen von Puck erweitert.

Zusätzlich wird als Einstieg eine allgemeinere Schreibweise für die Bruchkriterien angegeben, um darzustellen, wie durch Hashin die Bruchebenespannungen sowie der zu bestimmende Bruchwinkel und schließlich durch Puck die sog. Wirkebene-Bruchwiderstände (mit Index A), - statt der (Basis-) Festigkeiten - eingeführt und verwendet werden:

Mohrs Hypothese für isotrope Werkstoffe

- Die Bruchgrenze (und die Fließgrenze) eines Materials wird durch die Spannungen der Bruch-"Ebene" (und der Gleitebene) bestimmt:

$$F(\sigma_n, \tau_n, R_\tau, \theta_B) \stackrel{>}{<} 1 \quad (1.20)$$

Die Formulierung erfolgt in den Mohrschen Bruch(ebene)spannungen und in (Basis-)Festigkeiten. Mohr verwendet nicht den Index A, da er in Bruchspannungen "denkt". Er hat sich im wesentlichen auf Aussagen zum Schubbruch beschränkt. Die Hypothese wird gedanklich aber auch für Normalbruch herangezogen.

Hashins Idee für die P-ES (UD-Schicht)

- Wenn eine Versagensebene unter dem Bruchwinkel θ_B identifiziert werden kann, wird das Versagen (ZFB) von der Normalspannung σ_n und der Schubspannung $\tau_n = \sqrt{\tau_{nt}^2 + \tau_{nl}^2}$ stets auf einer faserparallelen Ebene bewirkt:

$$F(\sigma_n^A, \tau_n^A, R_\sigma, R_\tau, \theta) \stackrel{>}{<} 1 \quad (1.21)$$

Die Formulierung erfolgt in Wirkebenespannungen (Index A, θ -abhängig) und (Basis-)Festigkeiten. Der Bruchwinkel θ_B ist extra zu bestimmen.

Pucks Erweiterung für die P-ES (UD-Schicht) [Puc92]

- Wenn unter der Wirkung einer Quer-Zugspannung ($\sigma_n \geq 0$) eine faserparallele Bruchebene auf-

tritt, so ist der Bruch gemeinsam von der auf der Bruchebene im Augenblick des Bruchs wirkenden Quer-Zugspannung und den dort gleichzeitig wirkenden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{nl} verursacht worden.

- Eine auf eine Bruchebene wirkende Quer-Druckspannung ($\sigma_n < 0$) hat nicht zur Erzeugung des Bruchs beigetragen, sondern den durch die Schubspannungen τ_{nt} und τ_{nl} verursachten Schubbruch erschwert, indem sie einen mit steigender Druckspannung anwachsenden zusätzlichen Widerstand der Spannungs-Wirkebene gegen den Schubbruch hervorruft [Puc96a]. Puck führt hiermit die Bruchwiderstände der Wirkebene R_{σ}^A, R_{τ}^A ein:

$$F(\sigma_n^A, \tau_n^A, R_{\sigma}^A, R_{\tau}^A, \theta) \stackrel{>}{=} 1 \quad (1.22)$$

Die Formulierung erfolgt in Wirkebenespannungen und Bruchwiderständen der Wirkebene. Dabei werden *Bruchwiderstand* der Wirkebene und Basisfestigkeit nach [Puc96a], Seite 117, folgendermaßen definiert:

"Der Bruchwiderstand der Wirkebene ist derjenige Widerstand, den eine Schnittebene ihrem Bruch infolge einer einzelnen auf ihr wirkenden Spannung (σ_n oder τ_{nt} oder τ_{nl}) entgegensetzt" und "(Basis-)Festigkeit ist der Betrag der beim Bruch infolge einer einachsigen Normalbeanspruchung oder reinen Schubbeanspruchung auftretenden Spannung ($\max \sigma$ oder $\max \tau$), unabhängig davon, ob der Bruch in deren Wirkebene erfolgt oder nicht".

1.3.1.3 Wirkebene-ZFB-Kriterium

Bruchkriterium von Hashin für die P-ES

Trotz der physikalisch so wesentlichen Erweiterung für die Bestimmung des ZFB einer P-ES hat Hashin mit seinem quadratischen Ansatz für $\sigma_n^A \geq 0$

$$F = \left(\frac{\sigma_n^A(\theta)}{R_{\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}^A(\theta)}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}^A(\theta)}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 \stackrel{>}{=} 1 \quad \text{für } \sigma_n^A \geq 0 \quad (1.23)$$

nur wenig Aufmerksamkeit erfahren. Auch hat er selbst diesen Weg nicht weiter verfolgt, da er Probleme bei der rechenzeitintensiven Bruchwinkelsuche erwartete.

Als wesentlich ist festzuhalten: Statt der üblichen 6 Spannungen werden bei Hashin nurmehr die 3 räumlichen Wirkebenespannungen nebst dem Winkel θ verwendet.

Pucks Wirkebene-Bruchkriterien (erste Formulierung mit Lösungsweg)

In seiner ersten Formulierung lautete das Kriterium (Glg. 10 in [Puc92c]):

$$F(\sigma_n^A, \tau_{nt}^A, \tau_{nl}^A, R_{\sigma}^A, R_{\tau}^A, \theta) = \left(\frac{\sigma_n^A(\theta)}{R_{\perp}^{ZA}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}^A(\theta)}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}^A(\theta)}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 \stackrel{>}{=} 1 \quad \text{für } \sigma_n^A \geq 0 \quad (1.24)$$

$$F(\tau_{nt}^A, \tau_{nl}^A, R_{\sigma}^A, R_{\tau}^A, \theta) = \left(\frac{\tau_{nt}^A(\theta)}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}^A(\theta)}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 \stackrel{>}{=} 1 \quad \text{für } \sigma_n^A < 0, \quad (1.25)$$

wobei als Bruchwiderstände der Wirkebene gegen Normal- und Schubbruch die Größen $R_{\perp}^A$, $R_{\perp\perp}^A$, sowie $R_{\perp\parallel}^A$ auftreten.

Die unbekannten Bruchwiderstände sind aus den bekannten, in einachsigen Versuchen ermittelten Basis-Festigkeitswerten berechenbar. Aufgrund der Rotationssymmetrie um die Faserachse hängen sie nicht vom Winkel θ ab.

Ist der Bruchwiderstand, wie $R_{\perp\perp}^A$, nicht direkt meßbar, stellt er eine abgeleitete Größe dar, die natürlich an die mathematische Formulierung des Festigkeitskriteriums geknüpft ist. In einigen Fällen ist der Bruchwiderstand R^A aber mit der entsprechenden Basis-Festigkeit R identisch. Und zwar ist dies dann der Fall, wenn beim Bruchversuch mit der zugehörigen Beanspruchung Bruch in der Wirkebene dieser Beanspruchung stattfindet. Im einzelnen ergibt sich:

1. Quer-Zugbeanspruchung $\sigma_{\perp}^z$ ($=\sigma_2^z$ oder σ_3^z)

Das Verhalten des FKV ist spröde, so daß nicht ein geneigter Bruch wie bei duktilem Werkstoffverhalten sondern Bruch normal zur $\sigma_{\perp}^z$ -Richtung auftritt. Folglich gilt auch $R_{\perp}^{zA} \rightarrow R_{\perp}^z$.

2. Quer/Längs-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\parallel}$ ($=\tau_{21}$ oder τ_{31} ; nicht $\tau_{\parallel\perp}$)

Der Versuch zeigt, daß Bruch in der $\tau_{\perp\parallel}$ -Wirkebene auftritt. Folglich gilt $R_{\perp\parallel}^A = R_{\perp\parallel}$.

3. Quer/Quer-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\perp}$ ($=\tau_{23}$)

Dieser noch verbleibende unbekannte Bruchwiderstand der Wirkebene, die "Kohäsion" $R_{\perp\perp}^A$, läßt sich nicht (wie beim duktilen Werkstoff) direkt mittels eines Schubversuchs bestimmen. Bei sprödem Werkstoff führt ein $\tau_{\perp\perp}$ -Versuch (Bild 1/11) nämlich immer auf den Zugfestigkeitswert $R_{\perp}^z$ (Bruch unter 45°). Jedoch kann $R_{\perp\perp}^A$ indirekt über Querdruckfestigkeitsversuche mit der Messung von $R_{\perp}^d$ und θ_B^d ermittelt werden.

Diese Zusammenhänge werden später noch genauer beleuchtet.

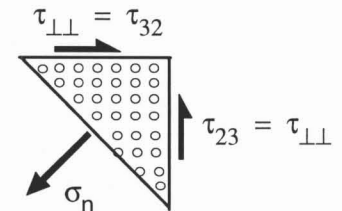


Bild 1/11:

Unbekannt ist weiter der Winkel maximaler Bruchgefahr, d.h. der Winkel θ_B der Bruchebene. Er läßt sich im einfachen Fall der Gl. (1.24) und (1.25) aus der Bedingung ausrechnen, daß die linke Seite F ein globales Maximum erreicht, d.h., daß θ_B durch Differentiation $\partial F/\partial \theta$ gewonnen wird. Dieses führt zu den folgenden impliziten Bestimmungsgleichungen:

(1.26)

$$\begin{aligned} [2\sigma_n^A/R_{\perp}^z + (\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_n^A)/R_{\perp\perp}^A] \tau_{nt}^A + [(c^2 - s^2) \tau_{21} \tau_{31} - sc(\tau_{21}^2 - \tau_{31}^2)]/R_{\perp\parallel}^2 &= 0 \quad \text{für } \sigma_n^A \geq 0, \\ [(\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_n^A)/R_{\perp\perp}^A] \tau_{nt}^A + [(c^2 - s^2) \tau_{21} \tau_{31} - sc(\tau_{21}^2 - \tau_{31}^2)]/R_{\perp\parallel}^2 &= 0 \quad \text{für } \sigma_n^A < 0. \end{aligned}$$

Die Schnitt- oder Wirkebene höchster Bruchgefahr wird allgemein numerisch iterativ ermittelt, indem die am UD-Körper anliegenden Spannungen in alle möglichen Wirkebenen im Winkelbereich $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$ transformiert werden (s.a. Bild 1/5) und für jeden daraus resultierenden Wirkebene-spannungszustand die Bruchgefahr (s. a. Bild 1/9) mit Hilfe der Bruchbedingungen (1.22) bestimmt wird. Der Festigkeitsnachweis, daß ZFB nicht auftreten wird, wird dann für diejenige Wirkebene durchgeführt, in der die Bruchgefahr maximal ist (s. Kap. 2).

Pucks Wirkebene-Bruchkriterien mit Berücksichtigung von innerer Werkstoffreibung

Weil in der Literatur zahlreiche Versuchsergebnisse vorliegen, (siehe Bild 1/12), bei denen in der (σ_2, τ_{21}) -Ebene ein „Buckel“ erkennbar wird, wurde von Puck die Gl. (1.25) erweitert, so daß der „Buckel“ gut abgebildet werden kann. Diese Erweiterung ist im Sinne des vorliegenden makroskopischen Ansatzes als Berücksichtigung von (Werkstoff-) Reibung zu interpretieren, d.h. als Coulombsche Reibung mit einem Reibungskoeffizienten $\mu_{\perp\parallel}$ in der UD-Schicht.

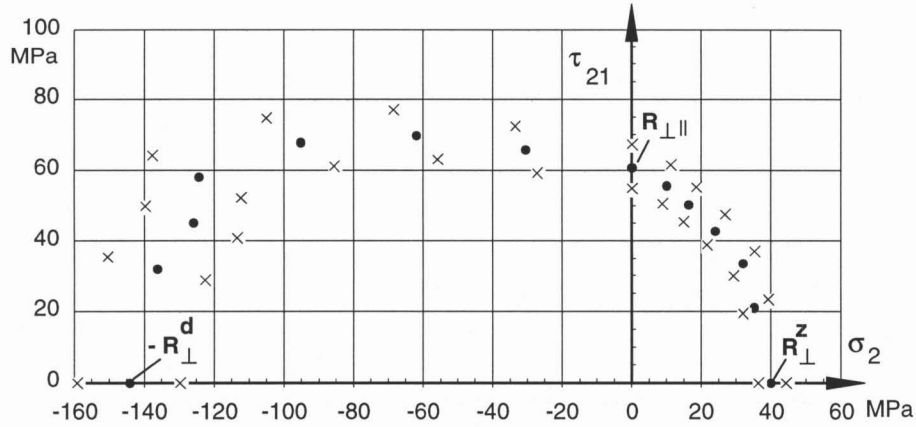


Bild 1/12: Der "Reibungsbuckel" in der (σ_2, τ_{21}) -Ebene. An Zug/Druck-Torsionsprobekörpern gemessene Werte, x = Minimum, Maximum, • = Mittelwert. (Versuchsergebnisse entstammen der Diplomarbeit von W. Schneider, s. [Sch74]).

Damit lauten die sog. Wirkebene-Bruchkriterien bei zusätzlicher Berücksichtigung von Reibung in der isotropen (x_2, x_3) -Ebene durch den Reibungskoeffizienten $\mu_{\perp\parallel}$ [Puc93]:

$$F = \left(\frac{\sigma_n^A(\theta)}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}^A(\theta)}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}^A(\theta)}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \quad \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1 \quad \text{für } \sigma_n^A \geq 0, \quad (1.27)$$

$$F = \left(\frac{\tau_{nt}^A(\theta)}{R_{\perp\parallel}^A - \mu_{\perp\parallel} \sigma_n^A(\theta)} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}^A(\theta)}{R_{\perp\parallel} - \mu_{\perp\parallel} \sigma_n^A(\theta)} \right)^2 \quad \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1 \quad \text{für } \sigma_n^A < 0. \quad (1.28)$$

Dieses "Ausgangsmodell", Gln. (1.27 und 1.28), stellten allerdings noch nicht die optimale numerische Form dar. Weiterführende Untersuchungen werden in Abschnitt 3.2 vorgestellt.

Im Sinne des obigen Puckschen „Reibungsansatzes“ im Bereich (σ_2^d, τ_{21}) ist zwangsläufig $\sigma_n = 0$ die Grenze von (1.28), was einen Knick beim Übergang von (1.27) auf (1.28) bedeutet. Physikalisch gesehen gibt es natürlich keinen scharfen Knick beim Übergang von $\sigma_n < 0$ nach $\sigma_n \geq 0$ (z.B. im Punkt $\sigma_2 = 0, \tau_{21} = R_{\perp\parallel}$), sondern eine differenzierbare Übergangszone.

Um den Knick zu vermeiden und um eine leicht verbesserte Adaption der Versuchsergebnisse [Kna72] im Bereich $\sigma_2 \geq 0$ zu erreichen (s. Abschnitt 2.4.1), haben Cuntze [Poh94] und Plica [Pli94] die Gl. (1.27) ebenfalls um die "Reibungsanteile" $\mu_{\perp\parallel} \sigma_n, \mu_{\perp\parallel} \sigma_n$ erweitert. Dieses "Erweiterte Ausgangsmodell" ist das physikalisch anschaulichste der später untersuchten Modelle (teilweise Puck/Plica-Modell genannt).

1.3.2 Probabilistische Zuverlässigkeitsbetrachtungen

Derzeit werden Bauteile aus FKV nach dem sog. Entwurfssicherheits-Faktorkonzept ausgelegt und ihre Festigkeit nachgewiesen. Diese Faktoren sind weitgehend aus deterministischen Betrachtungen hervorgegangen und lehnen sich an die bei metallischen Bauteilen üblichen Werte an. Sie enthalten einen unbekannten Anteil zur Abdeckung der Modell-Unsicherheiten bei Anwendung traditioneller Festigkeitskriterien. Bei diesem Konzept ist ein rationales Anpassen an veränderte Werkstoffstreuungen und an (sich an dem Verwendungszweck orientierende) Zielvorgaben für Sicherheit und Zuverlässigkeit kaum möglich.

In den letzten zwei Jahrzehnten hat sich die auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Basis beruhende Theorie der Strukturzuverlässigkeit auch für komplizierte Fälle zur Anwendungsreife entwickelt. Es gelingt mit ihr heute, Versagenswahrscheinlichkeiten für beliebige stochastische Modelle (Verteilungsfunktionen) der unsicheren Größen wie Werkstoffeigenschaften, geometrische Abmessungen und Belastungen sowie bei komplexen Zusammenhängen zwischen Beanspruchung und Versagenkriterien zu berechnen.

Die wichtigsten Verfahren werden unter den Begriffen Zuverlässigkeitsmethode 1. Ordnung (FORM) und 2. Ordnung (SORM) zusammengefaßt. Leistungsfähige Programme hierzu liegen vor (z.B. STRUREL). Dabei gelingt es, die Versagenswahrscheinlichkeit jeweils mit den traditionellen Sicherheitselementen in Nachweisvorschriften wie j-Faktoren oder neuerdings Teilsicherheitsfaktoren zu verknüpfen. Das ermöglicht die Ableitung von Teilsicherheitsbeiwerten für jedes Belastungszenarium, für gegebene Streuungen der Eingangsgrößen wie z.B. Festigkeitswerte und für jedes "geforderte" Sicherheitsniveau. Die entsprechende Methodik ist bereits im Bauingenieurwesen und in der Offshore - Technik mit Erfolg angewandt worden.

Im Zusammenhang mit Nachweiskonzepten für FKV-Bauteile ist jedoch der gesamte Komplex, d.h. von der Last (den Lasten) über die Beanspruchungsermittlung (FEM-Modell mit anisotropen Elementen) bis zu den verschiedenen an kritischen Stellen konkurrierenden Versagenkriterien (die im vorliegenden Fall z.T. nur durch Algorithmen gegeben sind) zu erfassen. Ein erster Versuch in diese Richtung wurde bereits mit dem Programm FRPREL unternommen.

Durch eine probabilistische Betrachtungsweise können Aussagen über Sicherheit und Zuverlässigkeit jedoch objektiviert werden. Hierzu müssen die vorhandenen Unsicherheiten durch probabilistische Modelle erfaßt werden. In den meisten Fällen reicht eine Modellierung durch einfache Zufallsvariable aus. Bei von der Zeit und von anderen Parametern wie Raumkoordinaten abhängigen Phänomenen werden Zufallsprozesse oder sogar Zufallsfelder erforderlich. Drei Arten von Unsicherheiten können unterschieden werden:

1. unvermeidliche Streuungen von Festigkeiten, Belastungen und/oder geometrischen Größen
2. statistische Unsicherheiten wegen zu kleinen Stichprobenumfangs
3. Modellunsicherheiten, z.B. des Festigkeitskriteriums.

Während die stochastischen Modelle für die erste und zweite Art von Unsicherheiten auf Grund

statistisch erhobener und ausgewerteter Daten festgelegt werden können, sind Unsicherheiten der dritten Art oft nur durch subjektive, aber nachvollziehbare Modelle erfassbar.

Zustandsfunktion, Versagenswahrscheinlichkeit:

Im einfachsten Fall einer Strukturkomponente mit *einem* Versagensmodus werden Belastungen und Festigkeiten und, sofern erforderlich, geometrische Größen durch einen Vektor von Zufallsvariablen $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ mit gemeinsamen Verteilungsgesetz $F_X(x)$ beschrieben. Der Zustand einer Strukturkomponente wird beschrieben durch eine *Zustandsfunktion* $g(X) \equiv F(\sigma, R) - 1$ der Zufallsvariablen und gegebenenfalls deterministischer Parameter dergestalt, daß $g(X) \leq 0$ den *Versagenszustand*, $g(X) > 0$ den *sicheren, funktionsfähigen Zustand* und $g(X) = 0$ den *Grenzzustand* darstellt.

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist dann durch das Bereichsintegral

$$P_f = \int_{g(x) \leq 0} f_X(x) dx \quad (1.29a)$$

gegeben, wobei $f_X(x)$ die gemeinsame Dichtefunktion der Zufallsvariablen ist. In der *Strukturzuverlässigkeitsanalyse* sind die Zufallsvariablen, die in der Zustandsfunktion benutzt werden, stets die unsicheren Konstruktionsparameter (Basisvariablen), u.a. die (Basis-)Festigkeiten.

Wenn statistische Unsicherheiten in den Verteilungsparametern der betrachteten stochastischen Modelle vorhanden sind, lautet die entsprechende Formel nach der Regel von Bayes

$$P_f = \int_{R} \int_{\Theta} f_X(x|\theta) f_{\Theta}(\theta) dx d\theta \quad (1.29b)$$

Darin ist θ (nicht zu verwechseln mit dem Wirkebene-Winkel θ) der Vektor der unsicheren Verteilungsparameter (z.B. von einer Basisfestigkeit) mit gemeinsamer Dichtefunktion $f_{\Theta}(\theta)$. Das Doppelintegral läßt sich in das obige Integral (1.29a) umformulieren, wenn man die unsicheren Verteilungsparameter als zusätzliche Basisvariable auffaßt (die allerdings nicht direkt in der Zustandsfunktion vorkommen). Im weiteren Text wird diese Aufteilung $(x|\theta)$ nicht mehr vorgenommen, sie soll nur ein Hinweis sein, daß in der Zuverlässigkeitsanalyse über die unsicheren Konstruktionsparameter hinaus noch mehr Basisvariable beteiligt sein können.

FKV-Kriterien sind mit den Spannungen ($\sigma_2, \tau_{21}, \dots$), den unsicheren Festigkeitsgrößen $R_{\perp}^z$ etc. sowie weiteren Festigkeitsparametern (m, μ) formuliert, wobei die Festigkeitsparameter direkt als Basisvariable aufgefaßt werden. Die Spannungen $\sigma = Z(X_L)$ dagegen sind bei einem Bauteil Funktionen der Last-Basisvariablen (X_L) an denjenigen kritischen Punkten im Bauteil, an denen ein Zuverlässigkeitsnachweis geführt wird. Die Berechnung des Vektors $Z(X_L)$ in einem Bauteil erfolgt üblicherweise mit einem FE-Programm. In Sonderfällen kann $Z(X_L)$ analytisch angegeben werden.

FORM, SORM, Teilsicherheitsbeiwerte:

Die Auswertung des n-dimensionalen Integrals (1.29a) mit klassischen Integrationsmethoden ist sehr aufwendig. Man hat daher gute Näherungsmethoden entwickelt, die in entsprechender Software

verschiedentlich realisiert wurden:

- Zuverlässigkeitsmethode 1. Ordnung (FORM)
- Zuverlässigkeitsmethode 2. Ordnung (SORM)
- Adaptive Sampling Verfahren
- Importance Sampling Verfahren
- Antwortflächenverfahren.

Hierbei werden der Zuverlässigkeitsmethode 1. Ordnung (FORM) sowie der Zuverlässigkeitsmethode 2. Ordnung (SORM) in der praktischen Anwendung der Vorzug wegen ihrer Anschaulichkeit und direkten Verbindung mit den Maßnahmen zur Erzielung von Sicherheit und Zuverlässigkeit bei traditioneller Vorgehensweise gegeben. Beide Methoden verlangen in der üblichen Form eine Verteilungstransformation, so daß die Rechnung im Raum der *unabhängigen, standard-normal-verteilten Variablen* U_i durchgeführt werden kann.

Die Theorie zur Berechnung der Strukturzuverlässigkeit ist in Kapitel 5.1 erläutert. Einige Begriffe sind hier wiedergegeben, da sie für die folgenden Ausführungen benötigt werden. Die FORM-Methode wurde ursprünglich von Hasofer/Lind [Has74] für normalverteilte Zufallsvariable vorgeschlagen und wurde von Rackwitz/Fiessler verallgemeinert [Rac78]. Es wird eine punktweise Transformation der Basisvariablen in U-Variable vorgenommen: $u = T^{-1}(x)$. Die Versagenswahrscheinlichkeit wird genähert durch

$$P_f \approx \Phi(-\beta), \quad (1.30)$$

wobei $\beta = \|u^*\|$ ist und u^* mit Hilfe einer Optimierung gefunden wird

$$u^* = \min \|u\| \text{ für } \{u: g(u = T^{-1}(x)) \leq 0\}.$$

Zu dem optimalen Entwicklungspunkt u^* , dem sog. β -Punkt, gehört der Punkt $x^* = T(u^*)$ im Raum der Basisvariablen, der zur Berechnung von *Teilsicherheitsfaktoren* γ verwendet wird. Für die i -te Basisvariable wird dieser zu (Teilsicherheitsfaktoren werden nicht mit j bezeichnet)

$$\gamma_i = x_i^* / x_{c,i} \quad (1.31a)$$

mit $x_{c,i}$ dem charakteristischen (Nominal-) Wert der Basisvariablen, der üblicherweise als Quantile (z.B. 95%) der Verteilungsfunktion für X_i angegeben ist. Für eine Variable auf der Belastungsseite ist x_i^* normalerweise größer als $x_{c,i}$ und γ_i damit größer als 1. Für unsichere Widerstandsgrößen geht man von der inversen Beziehung aus, um ebenfalls Teilsicherheitsfaktoren größer als 1 zu erhalten.

$$\gamma_i = x_{c,i} / x_i^* \quad (1.31b)$$

Aus dem Zusammenhang der γ 's mit dem β -Punkt wird offensichtlich, daß die Teilsicherheitsfaktoren auch vom (Versagens-) Wahrscheinlichkeitsniveau abhängen. Welches Niveau bei einer probabilistischen Bemessung anzustreben ist, hängt von den Schadensfolgen und dem Aufwand ab. In Kapitel 5.1 befindet sich eine Tabelle mit empfohlenen Niveaus. Die charakteristischen Werte sind üblicherweise MIL-A- oder -B-Werte.

Zum sog. β -Punkt gehört diejenige Kombination von unsicheren Konstruktionsparametern, bei der am wahrscheinlichsten Versagen eintritt.

Systemzuverlässigkeit

Bei der Zuverlässigkeitsanalyse von UD-SV ergibt sich in mehrfacher Hinsicht ein Systemproblem:

- In jeder Schicht gibt es zwei Versagensmodi (F_1 für FB *und* F_2 für ZFB), die wiederum aus mehreren Sub-Modi bestehen.
- In einer Struktur kann jeder der beiden Versagensmodi in jeder Schicht auftreten, so gibt es also n mögliche Versagensfälle bei n Schichten.
- Führt man den Nachweis für ZFB-Versagen der ersten Schicht in einem Bauteil, muß man zusätzlich noch alle Punkte (etwa die Knotenpunkte eines FE-Modelles) in die Alternativen miteinbeziehen, also $n \cdot m$ mögliche Versagensfälle bei n Schichten und m Punkten.
- Führt man den Nachweis für Totalversagen des SV, so muß Schicht 1 *und* Schicht 2 *und* ... Schicht n versagen. Die Überlegungen zu lokalem ZFB-Versagen der 1. Schicht an irgendeinem kritischen Punkt der Struktur oder Bauteilversagen sind analog zu oben.

Alternativ mögliche Versagensmodi sind in ihrer logischen Anordnung ein Seriensystem (*oder-Verknüpfung*). Dies führt zu einer Vereinigungsmenge der Versagenszustände

$$V_{\text{serie}} = \bigcup_i (V_i) \quad . \quad (1.32)$$

Müssen mehrere Versagensereignisse "hintereinander" auftreten, bis es zum (System-) Versagen kommt, wird die logische Anordnung ein Parallelsystem (*und-Verknüpfung*). Dies führt zu einer Schnittmenge der Versagenszustände

$$V_{\text{parallel}} = \bigcap_j (V_j) \quad . \quad (1.33)$$

Beim Nachweis eines Bauteiles auf Totalversagen ergibt sich die allgemeinste Form einer Systemdarstellung in der Zuverlässigkeitsanalyse, die (minimale) Vereinigung von Schnittmengen

$$V_{\text{system}} = \bigcup_{(i)(j)} \bigcap (V_{ij}) \quad . \quad (1.34)$$

V_{system} bezeichnet den Versagensbereich des Systems mit $V_{ij} = \{g_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0\}$ dem j -ten Modus in der i -ten Vereinigung (Alternative).

Die vorliegende Ausarbeitung konzentriert sich auf das erste Auftreten eines Versagensmodus ZFB in einer ES eines SV. Systemprobleme treten deshalb nur in Form von Vereinigungsmengen auf, wenn ein SV oder ein Bauteil zu untersuchen ist.

Stochastische Modellierung

Für jede Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit benötigt man ein vollständiges stochastisches Modell, d.h. die Verteilungsfunktionen aller unsicheren Konstruktionsparameter und gegebenenfalls ihre stochastischen Abhängigkeiten. Berechnete Versagenswahrscheinlichkeiten reagieren im allgemeinen sehr empfindlich auf die Verteilungsannahmen. Die begrenzte Anzahl an Versuchsdaten bringt es zumeist mit sich, daß man weit über die Datenbasis hinaus extrapolieren muß. Dies kann zu falschen Ergebnissen führen, da am sog. β -Punkt in der Strukturzuverlässigkeitsanalyse

meist extreme Realisationen der zufälligen Konstruktionsparameter vorliegen (sehr kleines zulässiges oder tolerierbares P_f).

Es ist daher wichtig, bei der stochastischen Modellierung neben offensichtlichen Einschränkungen (z.B. Wertebereich einer Variablen > 0) die physikalischen (mikromechanischen) Phänomene zu berücksichtigen, die Unsicherheiten erzeugen. Bei den in den FB- und ZFB-Kriterien auftretenden unsicheren Festigkeits- bzw. Widerstandsgrößen führen "Weakest Link"-Betrachtungen zur Weibullverteilung. Dieses Modell ist konservativ, da der untere Bereich der Weibullverteilung hohe Wahrscheinlichkeiten aufweist.

Die stochastische Modellbildung wird in den Kapiteln 5.2 und 5.3 beschrieben.

Datenanpassung

Im vorliegenden Fall lassen sich nicht alle Kurvenparameter der ZFB-Kriterien direkt messen, sondern müssen über eine Kurvenanpassung geschätzt werden. Es gibt verschiedene Maßzahlen, mit denen man die Güte einer solchen Anpassung beurteilen kann. Am bekanntesten ist der verbleibende mittlere quadratische Fehler, der auch bei größeren Streuungen der Beobachtungswerte selektiver ist als andere Maße.

Von erheblicher Bedeutung ist, für welche Größe der Fehler gebildet wird. Im vorliegenden Fall erscheint es am geeignetsten, vom Wert der Bruchgleichung, d.h. von $F(\sigma, R)$ selbst, auszugehen. Mit $\{1 - F(\sigma, R)\}$ ist dieser Wert positiv für sichere Zustände, gleich Null für den Bruchgrenzzustand und negativ für den Versagenszustand.

Zur Datenanpassung kommen drei Verfahren in Frage:

- Das Verfahren vom *Minimum der Abweichungsquadrate* ist verteilungsfrei, d.h., es sind vorab keine Annahmen über das stochastische Modell der zu schätzenden Parameter zu machen. Es wird deshalb, und weil keine "Freiheitsgrade" verloren gehen (s. unten), bevorzugt verwendet. Nachteilig ist, daß man nicht zwischen tatsächlichen Streuungen der Festigkeitsparameter, Meßfehlern und einem systematischen Fehler unterscheiden kann.
- Das *Momenten-Verfahren* ist ebenfalls verteilungsfrei aber statistisch wenig effizient. Von Vorteil ist, daß man mit diesem Verfahren stochastische Abhängigkeiten der unsicheren Parameter schätzen kann.
- Für das *Maximum-Likelihood-Verfahren*, das aus statistischer Sicht allen anderen vorzuziehen ist, müssen Verteilungsannahmen gemacht werden, was im vorliegenden mehrdimensionalen Fall sehr schwierig ist. Zudem ist dieses Verfahren numerisch äußerst aufwendig. Auch besteht die Gefahr, daß bei diesem Verfahren durch die Verteilungsinformation mehr Information in die Daten hineingesteckt wird als in ihnen wirklich vorhanden ist.

Für das Momenten- und das Maximum-Likelihood-Verfahren muß ein neuer Datensatz für den unbekannten Parametervektor erstellt werden. Jeweils n Versuche werden verwendet, um *eine* Realisation der n Elemente des Parametervektors zu bestimmen. Dies bedeutet den Verlust eines erheblichen Teils der "Freiheitsgrade", d.h., man benötigt wesentlich mehr Versuche, was wegen der

teuren Versuche ein erheblicher Nachteil ist.

Die Kapitel 4.1 und 4.2 beschreiben die Methoden und die Qualitätskriterien der Datenanpassung.

1.3.3 2D- und 3D-Versuchstechniken sowie Erfassung von Eigenspannungen

Zur werkstoffmechanischen Charakterisierung faserverstärkter Polymere werden üblicherweise Prüfungen an Flachprobekörpern durchgeführt. Die Versuche sind dabei weitgehend genormt und haben ihren Ursprung in den Prüfmethoden isotroper metallischer Werkstoffe, womit hier evtl. von vornherein kein optimal angepaßtes Verfahren zur Prüfung anisotropverstärkter Verbunde vorliegt. Zu den wichtigsten Normprüfverfahren, mit denen die Grundkenndaten in der Schichtebene ermittelt werden, zählen: Zugversuch, Druckversuch und Schubversuch (vgl. dazu z. B. DIN 29 971, EN 61, DIN EN 2 747, DIN 65 378 V, DIN 65 380 V, DIN EN ISO 14 126, DIN 65 373 V, DIN EN ISO 14 129, DIN 53 399), wobei die Belastung im wesentlichen parallel und senkrecht zu den Fasern eingeleitet wird.

Bei schräger Faserlage (sog. off-axis-Versuche) lassen sich mehr Werkstoffkenndaten der 2D-Schicht ermitteln als mit den Probekörpern zuvor und gegebenenfalls zur Verifizierung von Festigkeitshypothesen oder transformierten Elastizitätseigenschaften heranziehen. So wird der aus mechanischer Sicht bedenkliche off-axis-Versuch an einem reinen 45° - bzw. besser $[+45/-45]_S$ - Probekörper in praxi häufig zur Ermittlung der Schubfestigkeit herangezogen. Vergleichende Untersuchungen mit dem Schubrahmen zeigen, daß bei der Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ Unterschiede von über 50 % keine Seltenheit sind. Bereits damit wird die unterschiedlich anisotropiebeeinflusste Problematik verschiedenartiger Prüfverfahren deutlich. Die hierbei auftretenden Diskrepanzen der Festigkeitswerte sind im wesentlichen begründet im Einfluß der freien Ränder, der Einspannbedingungen der Geometrie der Flachprobekörper usw., die bei off-axis-Versuchen noch weiter verfälscht werden, da sich der Probekörper nicht unbehindert schrägstellen kann (S-Schlag-Verformung).

Vereinzelte werden zur Ermittlung der Basis-Festigkeiten Biegeversuche durchgeführt. Diese Versuchskennwerte sollten bei der Berechnung von FKV-Bauteilen nur als sehr grobe Richtwerte behandelt werden, da sich im Probekörper zum einen kein wirklich linear verlaufender Spannungszustand ausbildet und zum anderen der Unterschied zwischen Druck- und Zugfestigkeit nicht erfaßt werden kann.

Weitere Schwierigkeiten treten auf, wenn die oben aufgeführten experimentellen Untersuchungen an Flachprobekörpern zur Verifizierung von pauschalen Festigkeitskriterien herangezogen werden. So muß sich etwa bei dem Bruchkriterium von Tsai/Wu der Interaktionskoeffizient F_{12} in vorgegebenen Grenzen der Schichtebenespannungen bei Bruch befinden, damit die pauschale Bruchgrenzfläche

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}, R_{\parallel}^z, R_{\parallel}^d, R_{\perp}^z, R_{\perp}^d, R_{\perp\parallel}) = 1 \quad (1.35)$$

- physikalisch sinnvoll - im Zugbereich "geschlossen" bleibt. (Bem.: Hingegen wird später gezeigt, daß die ZFB-Grenzfläche im Druckbereich (σ_2^d, σ_3^d) zwar offen ist, aber dort durch eine FB-Grenzfläche geschlossen wird).

Zur experimentellen Ermittlung der Werte von F_{12} sind glasfaserverstärkte Kunststoffe sowohl im Zugversuch als auch im Schubversuch bei off-axis-Belastung geprüft worden [Kro95]. Die wesentlichen Ergebnisse sind in *Bild 1/13* zusammengestellt, woraus belegt ist, daß bei beiden Versucharten für fast alle Faserorientierungen und damit untersuchten Spannungszustände (σ_1^z , σ_2^z , τ_{21}) der Koeffizient F_{12} einen Wert annimmt, der eine "nicht geschlossene" Bruchgrenzfläche zur Folge hat. In der Praxis wird F_{12} deswegen ein *theoretischer* Wert zugeordnet (Gl. (1.7b) mit $\tilde{F}_{12}=0$ z.B.), um die zumindest im obigen Spannungszustandbereich physikalisch bedingte geschlossene Bruchgrenzfläche auch rechnerisch zu erzielen.

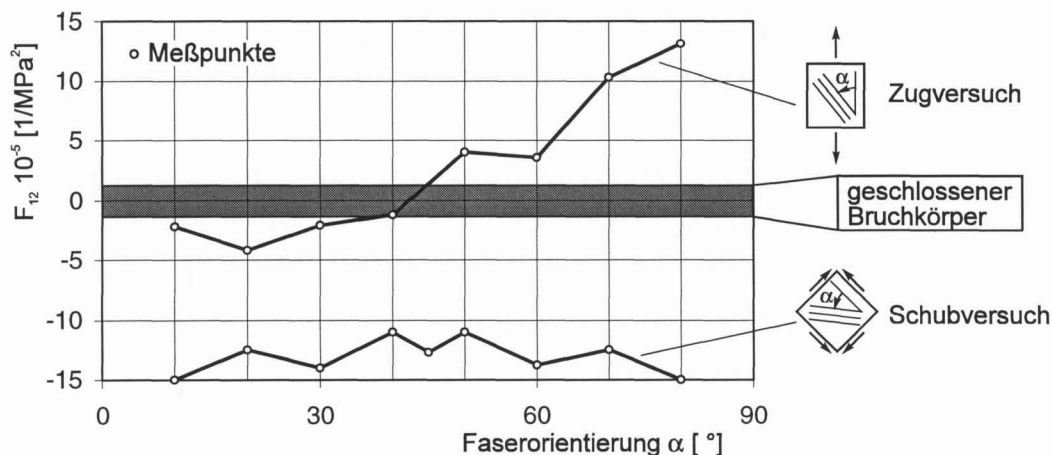


Bild 1/13: Experimentelle Ermittlung des Festigkeitskoeffizienten F_{12} in off-axis-Versuchen an einem AWW [+45/-45]_s aus "UD-Gewebe" in Abhängigkeit von Faserorientierungswinkel α . ($2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = F_1 \sigma_1 + F_{11} \sigma_1^2 + F_2 \sigma_2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \tau_{21}^2 - 1$)

Die Ergebnisse der Untersuchung gemäß *Bild 1/13* verdeutlichen zudem, daß physikalisch widerspruchsbefahene Festigkeitskriterien in Verbindung mit nicht fasergerechten Prüftechniken viele Zweifel bezüglich einer sinnvollen Interpretation des Bruchverhaltens von FKV aufwerfen.

Die 2D-Prüfverfahren erlauben lediglich die Werkstoffeigenschaften in der Schichtebene zu bestimmen. Bei Laminaten aus "hochanisotropen" Schichten, die unterschiedliche Faserlagen besitzen, sind allerdings infolge der Verformungsbehinderung die Spannungen mit der Flächennormalen senkrecht zur Schichtebene - interlaminare Normalspannung und Schubspannungen - häufig die Versagensursache. Ebenso versagensrelevant sind die interlaminaren Spannungen bei Verbindungen, Steifigkeitssprüngen sowie räumlichen Beanspruchungen.

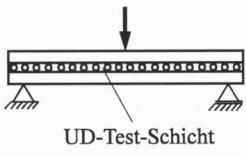
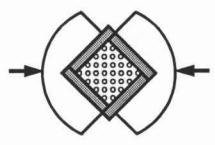
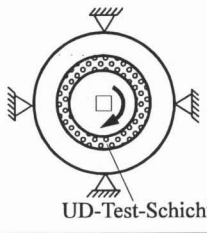
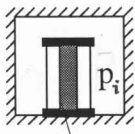
Zur versuchstechnischen Ermittlung der interlaminaren Festigkeiten sind eine Reihe einfacher Prüfmethode entwickelt und zum Teil genormt worden; vgl. z.B. Stirnabzugsversuch, Ring- und Segmentscherversuch, Kurzbiegeversuch sowie Schälversuch (DIN 53 397, DIN 53 769, DIN EN ISO 14 130 usw.). Die meisten dieser Prüfverfahren dienen lediglich zu einer qualitativen Beurteilung spezieller Werkstoffgruppen, etwa im Apparate- und Anlagenbau und eignen sich daher nur unter Vorbehalt für eine gesicherte Versagensanalyse. Eine geeignete und zudem erprobte Prüftechnik, die dem Anspruch einer faserverbundangepaßten Prüfmethode gerecht wird, ist die Prüfung tangential gewickelter Rohrprobekörper mit einer Zug/Druck-Torsions (Z/D-T)-Prüfmaschine. Durch Erweiterung der Z/D-T-Prüfmaschine um innen- und außendruckerzeugende

Einheiten sowie zusätzliches Variieren der Faserorientierung lassen sich fast alle benötigten Spannungs-kombinationen im $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12})$ -Raum realisieren. Damit steht eine Prüfeinrichtung zur Verfügung, mit der das neue Bruchkriterium auch in dem sehr interessanten 3D-Bereich bei Beanspruchungen in der Schichtebene überlagert mit senkrecht zur Schichtebene wirkenden Spannungen σ_3 überprüft werden kann. Da die Rohrprobekörper die Ausgangsbasis zur Verifizierung des ZFB-Kriteriums bilden, werden sie im weiteren als Standardrohrprobekörper bezeichnet.

Die Untersuchungen am parallel gewickelten Rohrprobekörper erlauben wichtige Bruchmechanismen physikalisch zu deuten und das ZFB-Kriterium entsprechend zu modifizieren. Allerdings ist es erforderlich, neue Versuchskonzepte zu entwickeln, um die wesentliche Stärke des neuen Bruchkriteriums hinsichtlich der Bewertung allgemeiner 3D-Spannungszustände unter Beweis zu stellen. Darüber hinaus sind gemäß Puckschen Modellvorstellungen insbesondere bei überlagerten Spannungszuständen mit den Schubspannungen τ_{31}, τ_{23} völlig neue Bruchmechanismen oder Versagensphänomene zu erwarten.

Einige Versuchsideen sind in *Tab. 1/1* zusammengestellt. Welche Versuchskonzepte sich aufgrund der Machbarkeit bezüglich der Herstellung und der Versuchsdurchführung im Vorhaben durchgesetzt haben und welche Versuchskonzepte modifiziert bzw. neu entwickelt worden sind, wird in den folgenden Kapiteln deutlich.

Tab. 1/1: Erste Versuchstechniken zur Überprüfung der ZFB-Hypothesen

Der geschichtete gerade Biegeträger		σ_2, τ_{23}
Der biaxiale Querdruckversuch mit "G-Elementen"		σ_2^d, σ_3^d
Der Torsionsring		τ_{32}, τ_{31}
Der geschichtete gekrümmte Biegeträger		σ_2^z, σ_3^z
UD-Probekörper		$\sigma_1^d, \sigma_2^d, \sigma_3^d$

1.3.4 Ermittlung von Eigenspannungen

In einem Verbundwerkstoff wie FKV sind Eigenspannungen unterschiedlichen Niveaus enthalten. Während die *Eigenspannungen 1. Art* (auf ES-Niveau) in den SV-Berechnungen durch die Berücksichtigung von Feuchte- und Temperaturspannungen (letztere entstehen z.B. beim Aushärten, wobei zusätzlich Schwind-Eigenspannungen auftreten) in der *SV-Berechnung erfaßt* werden, sind die beim Aushärten *gleichzeitig* entstehenden Eigenspannungen 2. Art (Faser-Matrix-Niveau) kaum Gegenstand der Untersuchung. *Eigenspannungen 2. Art* sind natürlich auch schon im ausgehärteten UD-Probekörper enthalten und bestimmen letztlich die maximale Spannung, die als *Festigkeitswert verwendet* wird. Es wird damit praktisch beim Übertragen der UD-Probekörperwerte auf eine P-ES im SV eines Bauteils angenommen, daß im Bauteil dieselben Aushärteeigenspannungen vorliegen und damit "vergessen" werden dürfen. Die Erfassung von thermischen Eigenspannungen 1. Art (*thermische* Schrumpfung) in der homogenisierten P-ES, die beim Aushärten eines SV durch das Verspannen der verformungsinkompatiblen, anisotropen ES unterschiedlicher Faserrichtung entstehen, gemäß $\alpha_T \cdot \Delta T$, ist allgemein üblich.

Parallel zu diesen beim Abkühlen unterhalb des Phasenübergangs Gelzustand zum *Festkörperzustand* ("Glas"-Zustand) verursachten Eigenspannungen entstehen weitere sog. Schwind-Eigenspannungen 1. Art durch Volumenschwindung der Matrix (*chemische* Schrumpfung: = Reaktions-Schwindung) infolge der Polymerisation, die auch noch im Festkörperzustand stattfindet. Ihr Betrag liegt bei Epoxid im Bereich einiger Promille.

Genaue Zahlen für den Volumenschwund im Festkörperzustand waren selbst von den Harz-Herstellern nicht erhältlich. Aus diesem Grund war zur Feststellung von Zahlenwerten vorgesehen, einen CFK-Kragplattenstreifen (200 x 20 x 1 mm) mit dem Schichtaufbau [0₂/90₂] auszuhärten und die konstante Krümmung ρ zu messen (s.a. [Wan95]). Das Schwindmaß läßt sich dann aus der Formel

$$\varepsilon_{s\perp} = \frac{(A_{11} + A_{12})(D_{12} - D_{11}) + B_{11}^2}{[B_{11}(C_{12} + C_{22})t - (A_{11} + A_{12})(C_{22} + C_{12})0,5 t^2] \rho} - \alpha_{T\perp} \cdot \Delta T, \quad (1.36)$$

ermitteln, worin t die Streifendicke, A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} die Steifigkeitskoeffizienten des SV und C_{ij} die Steifigkeitskoeffizienten der Elastizitätsmatrix der UD-Schicht sind. Für $\alpha_{T\perp}$ ist der im betrachteten Festkörper-Temperaturbereich linearisierte Wärmeausdehnungskoeffizient quer zur Faser $\alpha_{T\parallel} = 0$ einzusetzen und für ΔT die Temperaturdifferenz im Festkörperzustand. Der ermittelte Wert wird vom Monomertyp beeinflusst [Rot 77] und hängt möglicherweise noch geringfügig von der Aushärtekurve "Temperatur-Zeit" des Reaktionsharzsystems ab.

Wie bereits bemerkt, gibt es im UD-Probekörper schon auf Faser-Matrix-Niveau der in Wirklichkeit heterogenen P-ES Aushärteeigenspannungen. Zu ihrer Abschätzung sind Berechnungen an einem Faser-Matrix-Modell geeigneter Packungsart notwendig. Während die Temperatureigenspannungen über die im Abkühltemperaturbereich linearisierten Temperatureausdehnungskoeffizienten recht gut ermittelbar und damit recht sicher anwendbar sind, empfiehlt es sich für die harzsystemabhängigen Schwindmaße mehrere Werte anzunehmen, um die Einflußhöhe der nicht bekannten Festkörperschwindung bewerten zu können.

In Kapitel 2 sind die theoretischen Grundlagen der neuen ZFB-Kriterien aus mathematischer Sicht zusammengefaßt; exakte mathematische Begriffsbildungen und Beweise finden sich in [Jel 96a]. Für eine ausführliche Darstellung aus werkstofftechnischer Sicht sei auf [Puc 96a] verwiesen.

In den Kapiteln 2 und 3 wird durchweg angenommen, daß sich die Matrix eines Faser-Kunststoff-Elementes spröde verhält und dementsprechend Versagen durch Bruch erfolgt. Insbesondere wird angenommen, daß bei reiner Zugbeanspruchung die Wirkebene der Zugspannung zur Bruchebene wird. Des weiteren wird durchgängig $R_{\perp}^d \geq 2R_{\perp}^z$ vorausgesetzt.

Der nur an den konkreten Modellen interessierte Leser kann Kapitel 2 überschlagen und direkt in Abschnitt 3.2 einsteigen.

2.1 Der Bruchkörper eines transversal-isotropen Werkstoffelementes

2.1.1 Grundbegriffe

Das (x_1, x_2, x_3) -KS wird derart gewählt, daß die x_1 -Achse parallel zu den Fasern des Schnittelementes liegt (*Bild 2/1*). Die Werkstoffstruktur des Schnittelementes ist dann gegenüber Rotation des KS um die x_1 -Achse und gegenüber der Drehung um die x_3 -Achse um 180° invariant. Man sagt, das Schnittelement sei *in x_1 -Richtung transversal-isotrop*. Bei Drehung des KS um die x_1 -Achse um einen Winkel θ werden die Koordinaten mit (x_1, x_n, x_t) bezeichnet.

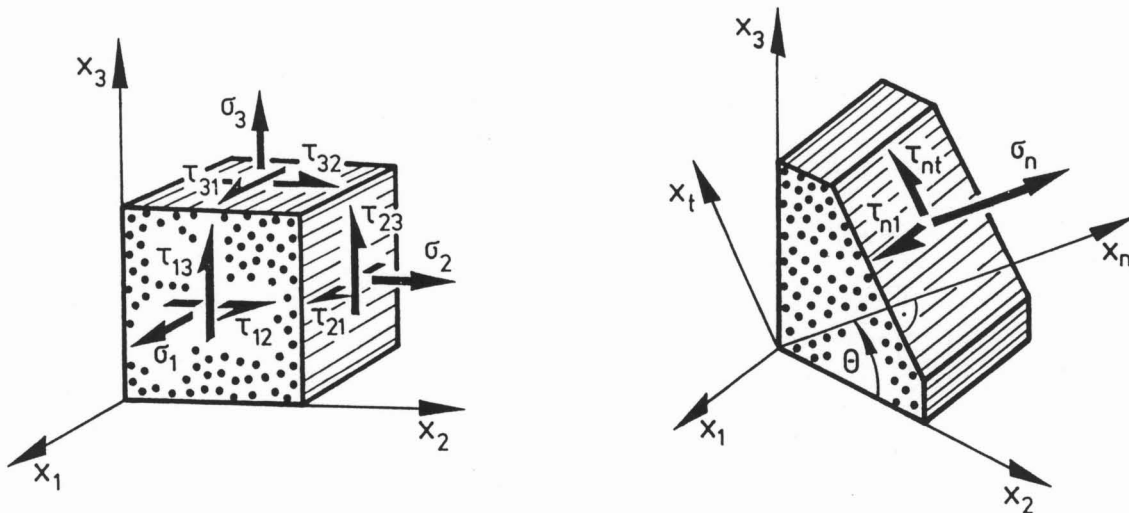


Bild 2/1: Spannungen bezüglich des (x_1, x_2, x_3) -KS bzw. Spannungen auf geneigter faserparallelen Ebene bezüglich des (x_1, x_n, x_t) -KS.

Ein sechsdimensionaler Spannungszustand des Schnittelementes bezüglich (x_1, x_2, x_3) wird in der vektoriellen Schreibweise $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$ dargestellt. Entsprechend benutzen wir der Kürze halber für eine im sechsdimensionalen Spannungsraum definierte Funktion $G(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ auch die Schreibweise $G(\sigma)$.

Als *Reservefaktor* f_{Res} eines Spannungszustandes σ bezeichnet man denjenigen positiven Faktor, für den $f_{Res} \cdot \sigma$ zum Bruch auslösenden Spannungszustand wird. Der Reservefaktor

kann als Funktion im sechsdimensionalen Spannungsraum aufgefaßt werden: $f_{Res} = f_{Res}(\sigma)$. Den reziproken Wert des Reservefaktors nennt man *Anstrengung* $A = A(\sigma)$:

$$A(\sigma) := 1 / f_{Res}(\sigma) .$$

Reservefaktor und Anstrengung sind homogene Funktionen vom Grad -1 bzw. 1 , d.h., es gilt

$$f_{Res}(\lambda\sigma) = \frac{1}{\lambda} f_{Res}(\sigma) \quad \text{für } \lambda > 0 , \quad (2.1)$$

$$A(\lambda\sigma) = \lambda A(\sigma) \quad \text{für } \lambda > 0 . \quad (2.2)$$

Die Menge aller Spannungszustände, bei denen nicht oder gerade Bruch eintritt, heißt *Bruchkörper*; die Oberfläche des Bruchkörpers bezeichnet man als *Bruchgrenzfläche*. Wird die Bruchgrenzfläche im sechsdimensionalen Spannungsraum durch eine Gleichung der Form

$$F(\sigma) = 1 \quad (2.3)$$

beschrieben, so spricht man von einer *Bruchbedingung*. $F(\sigma)$ bezeichnen wir als eine *den Bruchkörper / die Bruchgrenzfläche charakterisierende Funktion*. Im allgemeinen wird verlangt, daß innerhalb des Bruchkörpers $F(\sigma) < 1$ gilt und außerhalb $F(\sigma) > 1$. In diesem Fall spricht man auch von einem *Bruchkriterium*.

Bei gegebener Bruchbedingung (2.3) erhält man den Reservefaktor $f_{Res}(\sigma)$ eines Spannungszustandes σ durch Auflösen der Gleichung

$$F(f_{Res}(\sigma)\sigma) = 1 . \quad (2.4)$$

Ist insbesondere die Funktion $F(\sigma)$ homogen vom Grad $k > 0$, d.h., gilt $F(\lambda\sigma) = \lambda^k F(\sigma)$ für $\lambda > 0$, und ist $F(\sigma) \geq 0$, so folgt aus (2.4)

$$f_{Res}^k(\sigma) = \frac{1}{F(\sigma)} \quad \text{bzw.} \quad f_{Res}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt[k]{F(\sigma)}} . \quad (2.5)$$

($f_{Res}(\sigma) = \infty$ bedeutet, daß bei beliebiger proportionaler Erhöhung des Spannungszustandes σ nie Bruch eintritt.)

2.1.2 Transformationsformeln

Aufgrund der transversalen Isotropie des Schnittelementes besitzen der Bruchkörper und die damit verbundenen Größen gewisse Invarianzeigenschaften, die bei der Formulierung einer Bruchbedingung zu berücksichtigen sind.

Bei Drehung des KS um die x_1 -Achse um den Winkel θ (*Bild 2/1*) transformiert sich der Spannungszustand σ gemäß

$$\sigma \rightarrow T(\theta)\sigma \quad , \quad -180^\circ < \theta \leq 180^\circ , \quad (2.6)$$

mit

$$\mathbf{T}(\theta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & 2sc & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & c^2 & -2sc & 0 & 0 \\ 0 & -sc & sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

($c := \cos \theta$, $s := \sin \theta$). Bei Drehung des KS um die x_3 -Achse um 180° gilt

$$\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \mathbf{D}_3 \boldsymbol{\sigma} \quad (2.8)$$

mit der Diagonalmatrix

$$\mathbf{D}_3 := \text{diag}(1, 1, 1, -1, -1, 1) . \quad (2.9)$$

Die von den Transformationen $\mathbf{T}(\theta)$ und $\mathbf{D}_3$ erzeugte Transformationsgruppe bezeichnen wir mit $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T} := \{\mathbf{T}(\theta), \mathbf{D}_3 \mathbf{T}(\theta) \mid -180^\circ < \theta \leq 180^\circ\} , \quad (2.10)$$

ihre Elemente mit $\mathbf{T}$.

Da die Werkstoffstruktur des Schnittlelementes (*Bild 2/1*) gegenüber Rotation des KS um die x_1 -Achse und gegenüber der Drehung um die x_3 -Achse um 180° invariant ist, sind Bruchkörper und Bruchgrenzfläche bezüglich obiger Transformationen $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$ invariant. Dementsprechend sind auch Reservefaktor und Anstrengung gegenüber diesen Transformationen invariant, d.h., es gilt

$$f_{Res}(\mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}) = f_{Res}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{für alle } \mathbf{T} \in \mathcal{T} , \quad (2.11)$$

$$A(\mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}) = A(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{für alle } \mathbf{T} \in \mathcal{T} . \quad (2.12)$$

Hieraus folgt, daß eine Bruchbedingung (2.3) die Invarianzeigenschaft

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = 1 \Rightarrow F(\mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}) = 1 \quad \text{für alle } \mathbf{T} \in \mathcal{T} \quad (2.13)$$

besitzen muß.

Auf der geforderten Invarianzeigenschaft (2.13) basieren die *Invariantenkriterien* wie diejenigen von Tsai/Wu [Tsa 71] und Hashin [Has 80]. Beim Invariantenkriterium wird $F(\boldsymbol{\sigma})$ als Polynom in den sog. *Invarianten* bezüglich $\mathcal{T}$ angesetzt. Es sind dies Kombinationen von Einzelspannungen, die bei einer Transformation mittels $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$ invariant bleiben. Bezüglich $\mathcal{T}$ gibt es fünf unabhängige Invarianten [Has 80]:

$$I_1 := \sigma_1 \quad (2.14)$$

$$I_2 := \sigma_2 + \sigma_3 \quad , \quad I_3 := \tau_{23}^2 - \sigma_2 \sigma_3 \quad (2.15)$$

$$I_4 := \tau_{31}^2 + \tau_{21}^2 \quad , \quad I_5 := 2\tau_{23}\tau_{31}\tau_{21} - \sigma_2\tau_{31}^2 - \sigma_3\tau_{21}^2 . \quad (2.16)$$

2.2 Mohrsche Bruchbedingungen

2.2.1 Die Hypothesen von Hashin/Mohr

Ausgangspunkt der neuen ZFB-Kriterien sind die beiden folgenden von Hashin [Has 80] auf der Basis der Mohrschen Bruchtheorie formulierten Hypothesen:

- (H I) *Ein ZFB erfolgt stets in einer faserparallelen Schnittebene.*
 (H II) *Für einen ZFB sind ausschließlich die auf der Bruchebene wirkenden Normal- und Schubspannungen maßgebend.*

Nach (H I) und (H II) sind für Auslösung und Richtung eines ZFB die auf den faserparallelen Schnittebenen wirkenden Spannungsvektoren ausschlaggebend. Entsprechend der Kennzeichnung des um die x_1 -Achse gedrehten KS mit (x_1, x_n, x_t) stellen wir den Spannungsvektor, der auf der Schnittebene mit dem Neigungswinkel θ wirkt, durch $\sigma_n = (\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})^T$ dar (Bild 2/1). Ist $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$ der Spannungszustand bezüglich (x_1, x_2, x_3) , so berechnen sich die drei Komponenten des Spannungsvektors σ_n gemäß (2.7) zu

$$\begin{aligned}\sigma_n = \sigma_n(\theta) &= \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta + 2\tau_{23} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \cos 2\theta + \tau_{23} \sin 2\theta ,\end{aligned}\quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}\tau_{nt} = \tau_{nt}(\theta) &= -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta + \sigma_3 \sin \theta \cos \theta + \tau_{23}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2) \sin 2\theta + \tau_{23} \cos 2\theta ,\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$\tau_{n1} = \tau_{n1}(\theta) = \tau_{31} \sin \theta + \tau_{21} \cos \theta . \quad (2.19)$$

Damit hat eine Bruchbedingung für ZFB nach Hashin/Mohr die Gestalt

$$F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) = 1 \quad (2.20)$$

oder, in Vektorschreibweise,

$$F(\sigma_n) = 1 .$$

Wir sprechen von einer *Mohrschen Bruchbedingung* bzw. einem *Mohrschen Bruchkriterium*. Einen Bruchkörper, der durch eine Mohrsche Bruchbedingung erzeugt wird, nennen wir *vom Mohrschen Typ* oder kurz einen *Mohrschen Bruchkörper*.

Da das Vorzeichen der Schubspannungen τ_{nt}, τ_{n1} keinen Einfluß auf das Bruchgeschehen hat, muß eine Mohrsche Bruchbedingung (2.20) bezüglich der Transformationen $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) \rightarrow (\sigma_n, -\tau_{nt}, \tau_{n1})$ und $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) \rightarrow (\sigma_n, \tau_{nt}, -\tau_{n1})$ invariant sein, d.h., es muß

$$F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) = 1 \Rightarrow F(\sigma_n, -\tau_{nt}, \tau_{n1}) = 1 , \quad (2.21)$$

$$F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) = 1 \Rightarrow F(\sigma_n, \tau_{nt}, -\tau_{n1}) = 1 \quad (2.22)$$

gelten.

Geometrisch gesehen kann (2.20) als Definitionsgleichung einer Fläche bzw. eines Körpers im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum interpretiert werden. Puck hat dafür die Begriffe *Masterfläche* und *Masterkörper* eingeführt [Puc 96a]. Entsprechend bezeichnen wir die Funktion F in (2.20) als eine *den Masterkörper / die Masterfläche charakterisierende Funktion*. Die Invarianzeigenschaften (2.21), (2.22) bedeuten, daß die Masterfläche sowohl bezüglich der (σ_n, τ_{n1}) -Ebene als auch bezüglich der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene symmetrisch ist.

Eine Mohrsche Bruchbedingung (2.20) für ZFB ist von der Normalspannung σ_1 in x_1 -Richtung unabhängig, denn die Spannungsvektoren σ_n auf den faserparallelen Schnittebenen sind von σ_1 unabhängig. Mit andern Worten: Die Hypothesen (HI), (HII) beinhalten insbesondere, daß σ_1 keinerlei Einfluß auf den ZFB hat (s. hierzu Abschnitt 2.6).

Im folgenden wird bei einer Mohrschen Bruchbedingung (2.20) stets vorausgesetzt, daß innerhalb des Masterkörpers $F(\sigma_n) < 1$ und außerhalb $F(\sigma_n) > 1$ gilt. Für die Angabe des Schnittwinkels θ legen wir das Intervall $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$ fest. Der Bruchwinkel wird mit θ_B bezeichnet.

2.2.2 Rechnerische Handhabung

Bei den nachfolgenden Überlegungen gehen wir von einem *festen* Spannungszustand $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$ aus. $f_{Res}(\sigma)$ sei der zugehörige Reservefaktor, $A(\sigma)$ die Anstrengung und θ_B der Bruchwinkel, unter dem bei Streckung des Spannungszustandes σ um den Faktor $f_{Res}(\sigma)$ Bruch erfolgt. Dann erfüllt der auf der Bruchebene wirkende Spannungsvektor $f_{Res}(\sigma)\sigma_n(\theta_B)$ die Bedingung (2.20), d.h., es ist

$$F(f_{Res}(\sigma)\sigma_n(\theta_B)) = 1 . \quad (2.23)$$

Für alle anderen faserparallelen Schnittebenen gilt

$$F(f_{Res}(\sigma)\sigma_n(\theta)) \leq 1 . \quad (2.24)$$

Aufgrund von (2.23), (2.24) ergibt sich ein einfaches Verfahren zur Ermittlung von $f_{Res}(\sigma)$ und θ_B . Man bestimmt für jeden Winkel θ , $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$, denjenigen positiven Faktor $f_{Str}(\theta)$, sog. *Streckungsfaktor*, für den $f_{Str}(\theta)\sigma_n(\theta)$ die Bruchbedingung (2.20) erfüllt, d.h., für den

$$F(f_{Str}(\theta)\sigma_n(\theta)) = 1 \quad , \quad -90^\circ < \theta \leq 90^\circ , \quad (2.25)$$

gilt. Wegen (2.23) ist

$$f_{Str}(\theta_B) = f_{Res}(\sigma) . \quad (2.26)$$

Andererseits besteht wegen (2.23), (2.24) die Ungleichung

$$f_{Str}(\theta) \geq f_{Res}(\sigma) \quad , \quad -90^\circ < \theta \leq 90^\circ . \quad (2.27)$$

Daraus folgt:

Der Bruchwinkel θ_B ist globale Minimalstelle des Streckungsfaktors $f_{Str}(\theta)$, $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$, und das globale Minimum ist gleich dem Reservefaktor $f_{Res}(\sigma)$.

Anmerkungen

1. Wie schon bemerkt, beeinflusst nach (HI), (HII) eine Normalspannung σ_1 in x_1 -Richtung den ZFB nicht. Dies bedeutet insbesondere, daß sich bezüglich der Spannungszustände $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$ und $\sigma' := (0, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$ der gleiche Reservefaktor und die gleichen Bruchwinkel ergeben:

$$f_{Res}(\sigma) = f_{Res}(\sigma') \quad , \quad \theta_B(f_{Res}(\sigma)\sigma) = \theta_B(f_{Res}(\sigma')\sigma') .$$

Man darf deshalb von vornherein $\sigma_1 = 0$ setzen (s. auch Abschnitt 2.6).

2. Da der Streckungsfaktor $f_{Str}(\theta)$ unendlich groß werden kann, ist es für die numerische Berechnung günstiger, mit der reziproken Funktion $1/f_{Str}(\theta)$ zu arbeiten. Wir verwenden nach [Puc 96a] dafür den Begriff *Bruchgefahr* $D(\theta)$:

$$D(\theta) := 1/f_{Str}(\theta) .$$

Es gilt dann:

*Der Bruchwinkel θ_B ist globale Maximalstelle der Bruchgefahr $D(\theta)$,
 $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$, und das globale Maximum ist gleich der Anstrengung $A(\sigma)$.*

3. Ist die Funktion $F(\sigma_n)$ in (2.20) homogen vom Grad $k > 0$ und ist $F(\sigma_n) \geq 0$, so berechnen sich Streckungsfaktor und Bruchgefahr zu (vgl. (2.5))

$$f_{Str}^k(\theta) = \frac{1}{F(\sigma_n(\theta))} \quad \text{bzw.} \quad f_{Str}(\theta) = \frac{1}{\sqrt[k]{F(\sigma_n(\theta))}} \quad , \quad -90^\circ < \theta \leq 90^\circ \quad , \quad (2.28)$$

$$D^k(\theta) = F(\sigma_n(\theta)) \quad \text{bzw.} \quad D(\theta) = \sqrt[k]{F(\sigma_n(\theta))} \quad , \quad -90^\circ < \theta \leq 90^\circ \quad . \quad (2.29)$$

4. Bei der Interpretation der globalen Minimalstellen des Streckungsfaktors als mögliche *physikalische* Bruchwinkel ist Vorsicht geboten. Während das globale Minimum und damit der Reservefaktor eine numerisch stabile Größe ist, sind die Minimalstellen numerisch schlecht konditioniert, d.h., kleine Modell- bzw. Parameteränderungen können zu großen Abweichungen führen (s. Abschnitte 3.2.1, 3.3, 4.4). Bei den betrachteten Modellen gilt dies insbesondere für den Halbraum $\sigma_n > 0$. Zusätzlich können mögliche Bruchwinkel durch sog. *Totraum* verdeckt werden (s. Abschnitt 2.3.2). Dementsprechend sei auch vor einer Überinterpretation der Funktion $D(\theta)$ als einer *physikalischen* Bruchgefahr gewarnt.
5. In [Puc 96a] wird der Streckungsfaktor auch als *winkelabhängiger Reservefaktor* bezeichnet, die Bruchgefahr als *winkelabhängige Anstrengung*. Da der "klassische" Reservefaktor und die "klassische" Anstrengung Funktionen im sechsdimensionalen Spannungsraum mit bestimmten Invarianzeigenschaften sind (s. Abschnitt 2.1.2), nehmen wir hier von den Puckschen Bezeichnungen Abstand, um Konfusionen zu vermeiden.

6. Das Berechnungsverfahren kann geometrisch veranschaulicht werden. Die Funktionen (2.17), (2.18), (2.19) definieren im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum eine Spannungskurve Γ :

$$\Gamma : \theta \rightarrow \sigma_n(\theta) = (\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta))^T \quad , \quad -90^\circ < \theta \leq 90^\circ . \quad (2.30)$$

(Die Spitzen der Vektoren $\sigma_n(\theta)$ sind die Kurvenpunkte.) Falls $\tau_{31} = \tau_{21} = 0$, stellt Γ den klassischen Mohrschen Kreis dar (Bild 2/2). Falls $\sigma_2 = \sigma_3$, $\tau_{23} = 0$ und $\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2 > 0$,

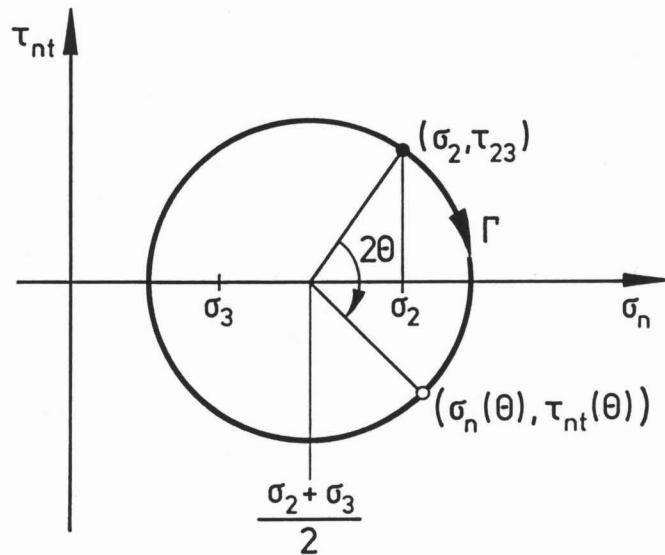


Bild 2/2: Vom Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ erzeugter Mohrscher Kreis in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene.

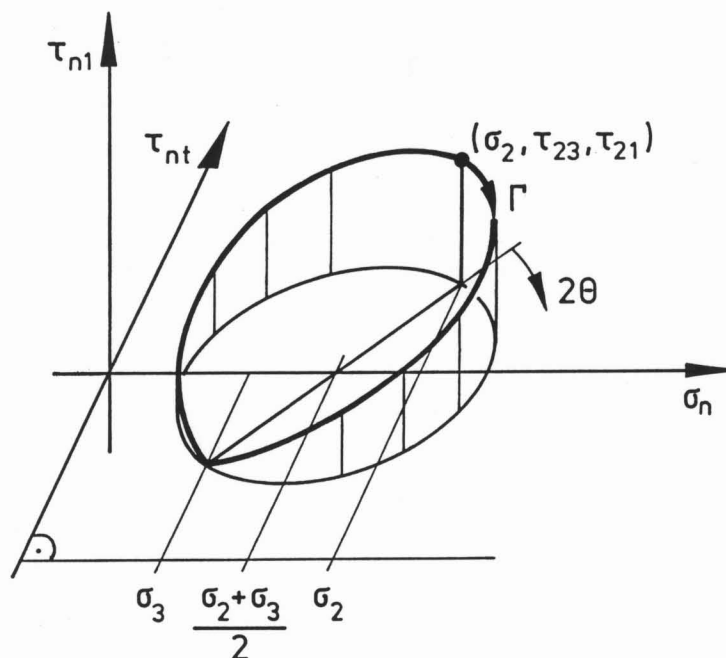


Bild 2/3: Vom Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{21})$ erzeugte Spannungskurve Γ im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum.

entartet die Kurve Γ zu einer (teilweise doppelt durchlaufenen) Strecke in der (σ_n, τ_{n1}) -Ebene parallel zur τ_{n1} -Achse. Im allgemeinen Fall verläuft die Kurve Γ in Form einer harmonischen Schwingung mit halber Kreisfrequenz über dem entsprechenden Mohrschen Kreis (*Bild 2/3* zeigt den Fall $\tau_{31} = 0$).

Eine proportionale Erhöhung des Spannungszustandes σ bis zum Bruch-Spannungszustand bedeutet geometrisch, daß die Spannungskurve Γ vom Nullpunkt aus gestreckt wird, bis sie die Masterfläche berührt. Der Streckungsfaktor, der zur Berührung führt, ist der Reservefaktor, die Berührungspunkte liefern die möglichen Bruchwinkel.

2.2.3 Der zylindrische Ansatz

Die einfachste Mohrsche Bruchbedingung der Form (2.20) ist der zylindrische Ansatz, bei dem der Masterkörper aus einer Ellipsoidhälfte und einem elliptischen Zylinder zusammengesetzt wird (*Bild 2/4*) [Has 80, Puc 92]:

$$F(\sigma_n) := \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (2.31)$$

$$F(\sigma_n) := \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (2.32)$$

Die Bruchbedingung ist a priori an die beiden Festigkeiten $R_{\perp}^z$ und $R_{\perp\parallel}$ angepaßt. Der durch die Zugspannung $\sigma_2 = R_{\perp}^z$ definierte Mohrsche Kreis berührt die Masterfläche für $\theta_B = 0^\circ$ (*Bild 2/5*); die durch die Schubspannung $\tau_{21} = R_{\perp\parallel}$ gemäß (2.30) definierte Spannungsstrecke $\Gamma: \theta \rightarrow \sigma_n(\theta) = (0, 0, R_{\perp\parallel} \cos \theta)^T$, $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$, berührt die Masterfläche ebenfalls für $\theta_B = 0^\circ$. Der Durchstoßpunkt $R_{\perp\perp}^M$ der τ_{nt} -Achse durch die Masterfläche kann bestimmt werden, indem man die Bruchbedingung an die Druckfestigkeit anpaßt, d.h., der durch die Druckspannung $\sigma_2 = -R_{\perp}^d$ definierte Mohrsche Kreis muß die Masterfläche tangieren. Diese Forderung liefert $R_{\perp\perp}^M = R_{\perp}^d/2$ und die Bruchwinkel $\theta_B^d = \pm 45^\circ$ (*Bild 2/5*).

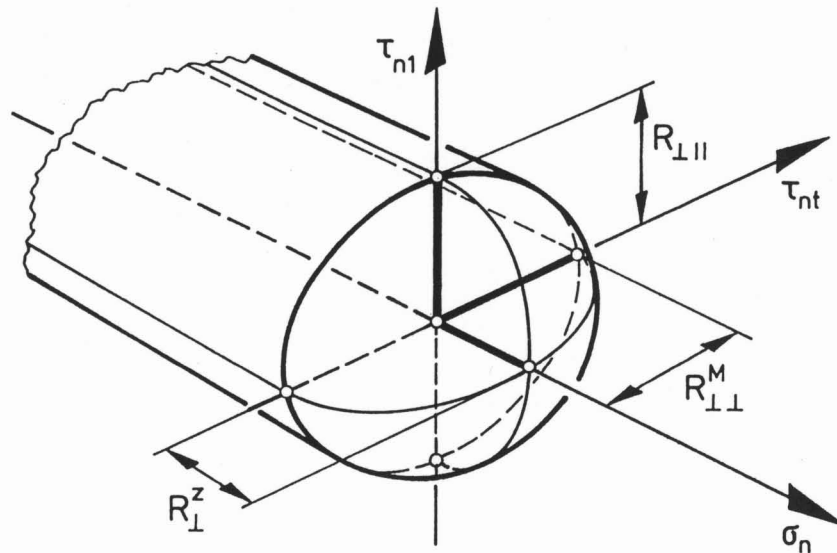


Bild 2/4: Zylindrischer Masterkörper nach Gl. (2.31), (2.32).

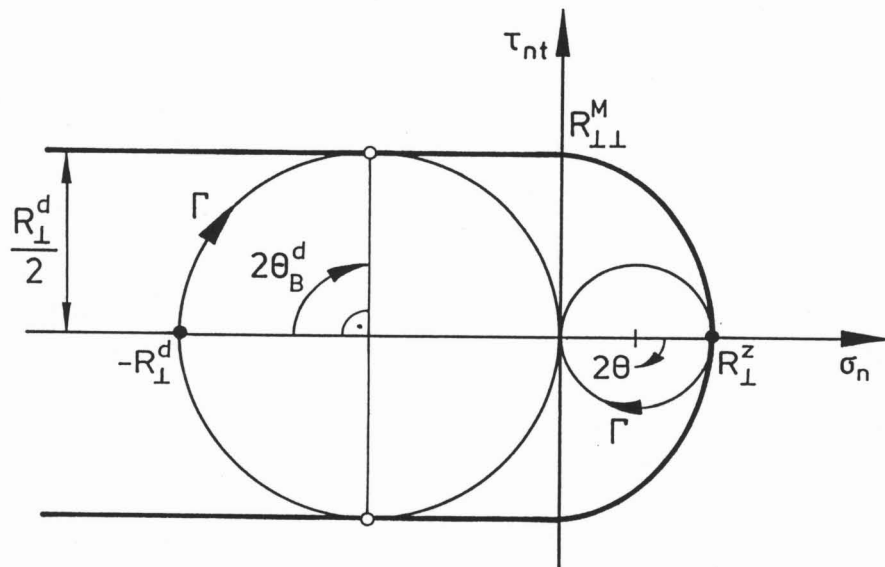


Bild 2/5: Schnitt $\tau_{n1} = 0$ des zylindrischen Masterkörpers (2.31), (2.32) mit Mohrschem Zug- und Druckkreis.

Die Bilder 2/6 - 2/8 zeigen die von der Bruchbedingung (2.31), (2.32) erzeugten Bruchkurven in der (σ_2, τ_{21}) -, (σ_3, τ_{21}) - bzw. (σ_2, σ_3) -Ebene für $R_{\perp}^z = 60$ MPa, $R_{\perp}^d = 180$ MPa, $R_{\perp||} = 80$ MPa. (In Bild 2/8 ist $M_0 = R_{\perp}^z - R_{\perp}^d/2$.) Auffallend ist der unterschiedliche Verlauf der (σ_2, τ_{21}) - und (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve. Hier wirkt sich aus, daß bei einer Mohrschen Bruchbedingung mit einer Spannung auch deren Wirkebene eingeht. Beim parabolischen Ansatz, Abschnitt 3.2.1, äußert sich das unterschiedliche Verhalten noch ausgeprägter (Bilder 3/3, 3/4).

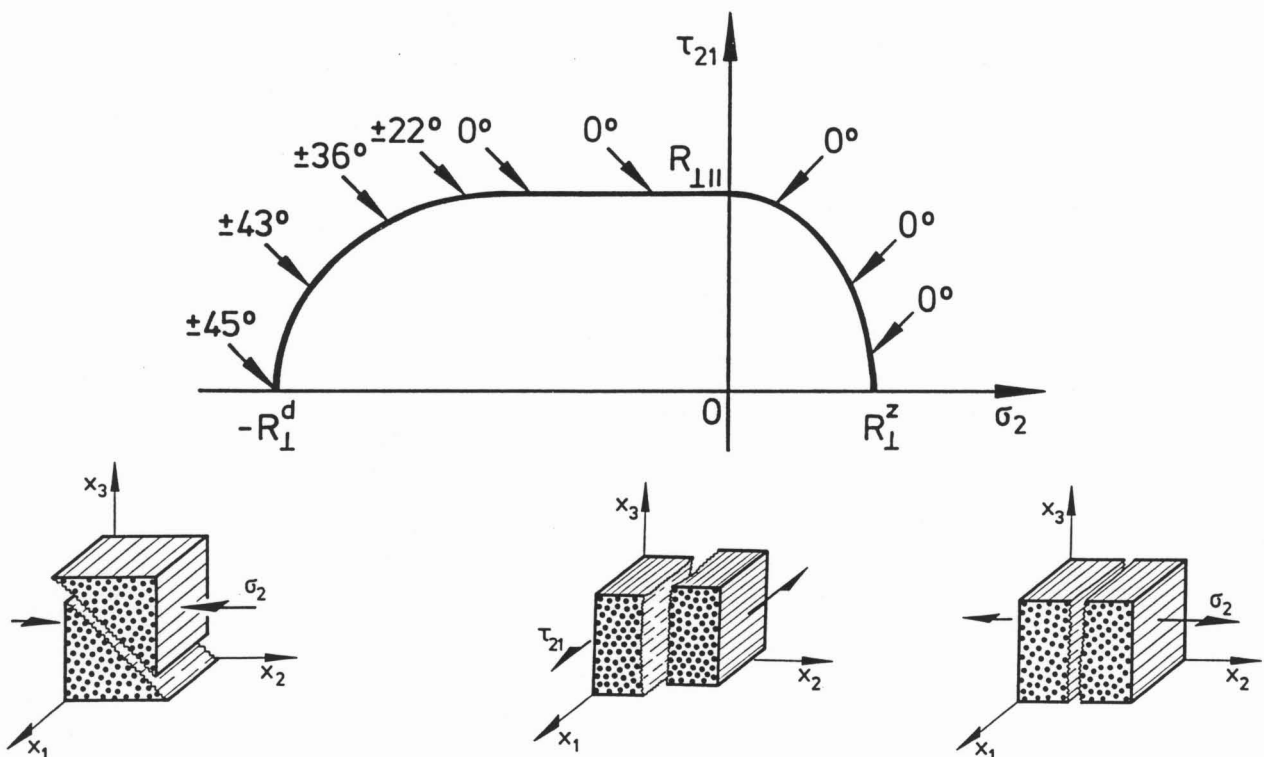


Bild 2/6: Von der Bruchbedingung (2.31), (2.32) erzeugte (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve mit Angabe der Bruchwinkel.

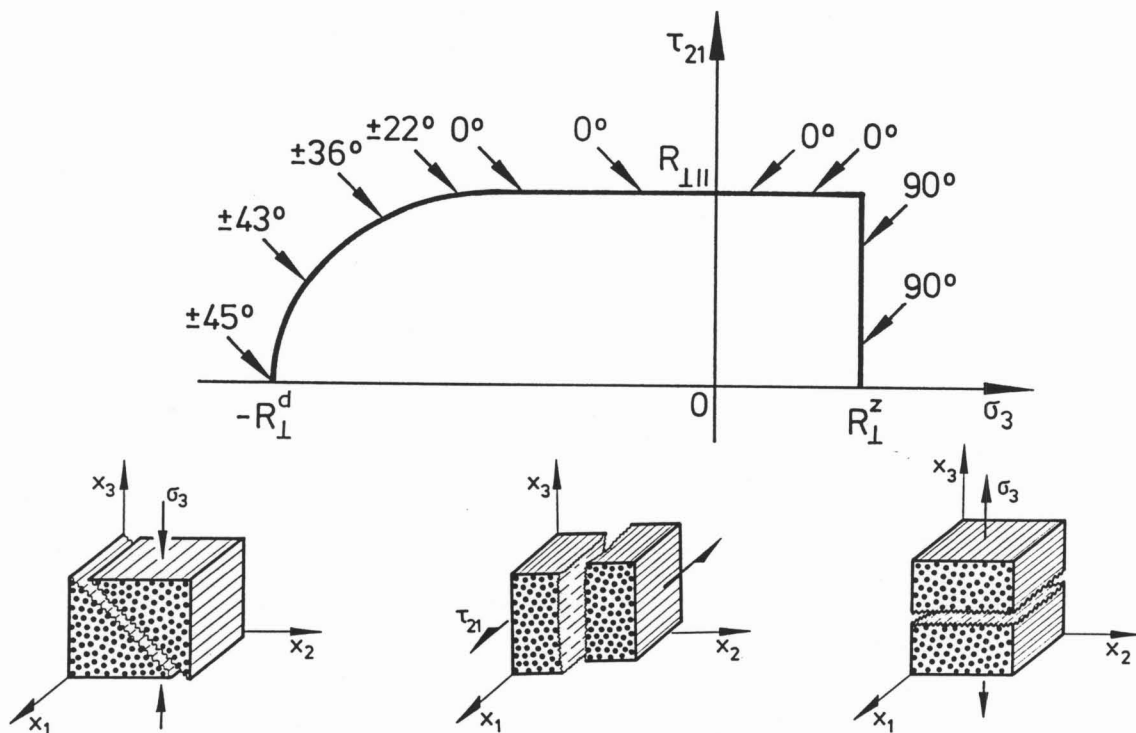


Bild 2/7: Von der Bruchbedingung (2.31), (2.32) erzeugte (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve mit Angabe der Bruchwinkel.

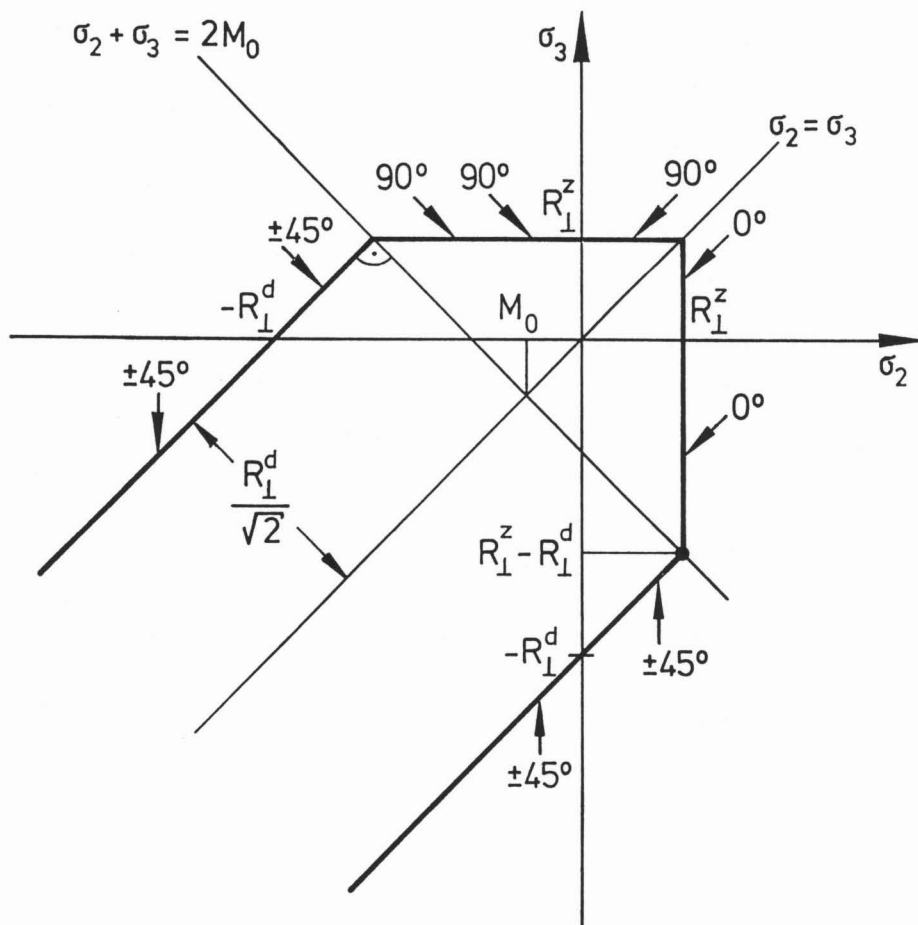


Bild 2/8: Von der Bruchbedingung (2.31), (2.32) erzeugte (σ_2, σ_3) -Bruchkurve mit Angabe der Bruchwinkel.

2.2.4 Eigenschaften des Mohrschen Bruchkörpers

In [Jel 96a] wurden folgende Eigenschaften eines Mohrschen Bruchkörpers nachgewiesen:

- (E I) *Reservefaktor und Anstrengung sind bezüglich der Transformationen $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$ invariant. Entsprechend sind auch Bruchkörper und Bruchgrenzfläche bezüglich $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$ invariant.*
- (E II) *Ist der Masterkörper konvex, so ist auch der Bruchkörper konvex.*
- (E III) *Ist der Masterkörper für $\sigma_n \geq K$ bei beliebiger Wahl von K beschränkt, so gilt: Der Bruchkörper ist für $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \geq K$ bei beliebiger Wahl von K beschränkt.*

Physikalisch interpretiert besagt (E III): Bei beliebigem Eigenspannungszustand des Schnittelementes kann der Reservefaktor eines Lastspannungszustandes $(0, \sigma_2^{(L)}, \sigma_3^{(L)}, \tau_{23}^{(L)}, \tau_{31}^{(L)}, \tau_{21}^{(L)})^T$ höchstens dann unendlich groß sein, wenn in beiden Hauptspannungsrichtungen senkrecht zur x_1 -Achse eine Druckspannung wirkt.

2.3 Geometrische Deutung der Mohrschen Bruchhypothese

2.3.1 Der Projektionskörper als Masterkörper

Die Mohrsche Bruchhypothese läßt eine einfache geometrische Deutung zu. Wir zeigen dies im Fall eines Bruchkörpers im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum. Für den allgemeinen Fall wird auf [Jel 96a] verwiesen.

Im folgenden sei $(\sigma_2^{(0)}, \sigma_3^{(0)}, 0)^T$ ein fester Bruch-Spannungszustand im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum. Bei Drehung des KS um die x_1 -Achse um den Winkel θ , $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$, transformiert sich der Spannungszustand nach (2.6), (2.7) gemäß

$$(\sigma_2^{(0)}, \sigma_3^{(0)}, 0)^T \rightarrow (\sigma_2(\theta), \sigma_3(\theta), \tau_{23}(\theta))^T = \mathbf{U}(\theta)(\sigma_2^{(0)}, \sigma_3^{(0)}, 0)^T \quad (2.33)$$

mit

$$\mathbf{U}(\theta) := \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Wegen der transversalen Isotropie des Schnittelementes sind mit $(\sigma_2^{(0)}, \sigma_3^{(0)}, 0)^T$ auch $(\sigma_2(\theta), \sigma_3(\theta), \tau_{23}(\theta))^T$, $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$, Bruch-Spannungszustände. Geometrisch gesehen verläuft damit die Kurve

$$\Gamma^* : \theta \rightarrow (\sigma_2(\theta), \sigma_3(\theta), \tau_{23}(\theta))^T, \quad -90^\circ < \theta \leq 90^\circ, \quad (2.35)$$

auf der Bruchgrenzfläche. Γ^* beschreibt eine Ellipse, und zwar ist Γ^* der Schnitt der Invariantebene $\sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_2^{(0)} + \sigma_3^{(0)}$ (s. (2.15)) mit dem vom Mohrschen Kreis

$$\Gamma : \theta \rightarrow (\sigma_2(\theta), 0, \tau_{23}(\theta))^T, \quad -90^\circ < \theta \leq 90^\circ, \quad (2.36)$$

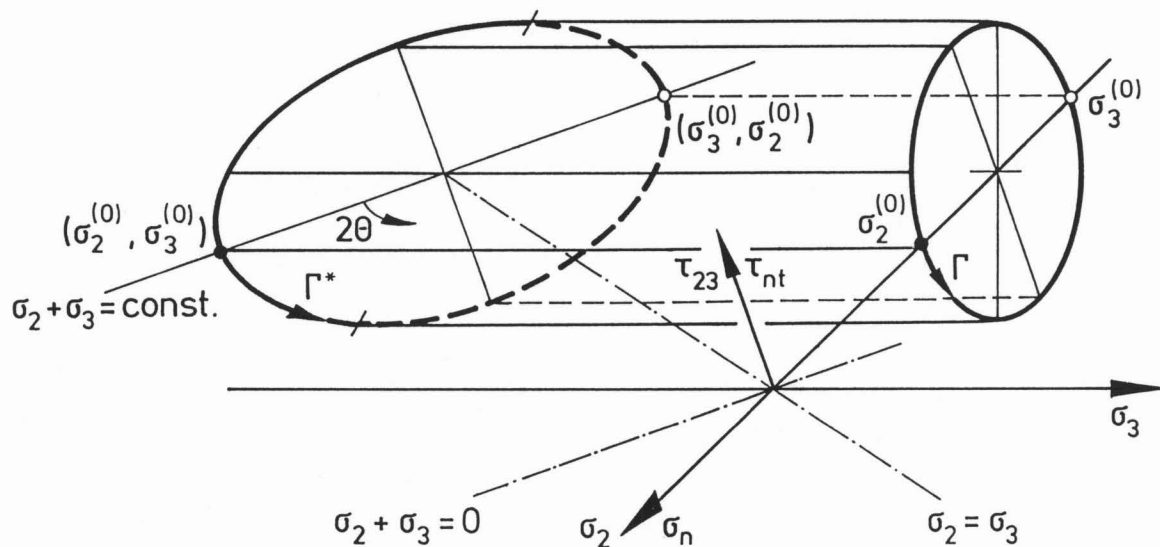


Bild 2/9: Der Schnitt der Bruchgrenzfläche im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum mit der Invariantenebene $\sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.}$ ist eine Ellipse. Deren Projektion in die (σ_2, τ_{23}) -Ebene ist mit dem Mohrschen Kreis identisch.

erzeugten Zylinder (Bild 2/9). (Das Achsenverhältnis der Ellipse ist $\sqrt{2} : 1$.) Umgekehrt bedeutet dies, daß die orthogonale Projektion der Kurve Γ^* in die (σ_2, τ_{23}) -Ebene den Mohrschen Kreis liefert.

Die Mohrsche Bruchhypothese besagt nun, daß es eine Enveloppe der Schar aller durch die Bruch-Spannungszustände definierten Mohrschen Kreise gibt. Nach obigen Überlegungen erhält man diese Enveloppe durch orthogonale Projektion des Bruchkörpers in die (σ_2, τ_{23}) -Ebene. Hieraus folgt:

Ein Mohrscher Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum ist durch seine orthogonale Projektion in der (σ_2, τ_{23}) -Ebene eindeutig bestimmt. Wird die (σ_2, τ_{23}) -Ebene mit der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene identifiziert, so stellt die Projektion den Schnitt eines den Bruchkörper erzeugenden Masterkörpers dar.

Im Fall des sechsdimensionalen Bruchkörpers kann eine entsprechende Aussage gemacht werden [Jel 96a]:

Ein Mohrscher Bruchkörper im sechsdimensionalen Spannungsraum ist durch seine orthogonale Projektion im $(\sigma_2, \tau_{23}, \tau_{21})$ -Raum eindeutig bestimmt. Wird der $(\sigma_2, \tau_{23}, \tau_{21})$ -Raum mit dem $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum identifiziert, so ist der Projektionskörper ein den Bruchkörper erzeugender Masterkörper.

Obiger Sachverhalt eröffnet eine Möglichkeit, einen Masterkörper aufgrund von Meßdaten zu konstruieren. Insbesondere gilt für den Durchstoßpunkt $R_{\perp\perp}^P$ der τ_{nt} -Achse durch den Projektionskörper: $R_{\perp\perp}^P$ ist der maximale τ_{23} -Wert, der bei Bruch-Spannungszuständen der Form $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T = (0, 0, \sigma_3, \tau_{23}, 0, 0)^T$ auftritt (Bild 2/10).

Wird $R_{\perp\perp}^P$ experimentell bestimmt, so wird bei sprödem Werkstoff $R_{\perp\perp}^P > R_{\perp}^z$ sein. Denn bei reiner Schubbeanspruchung τ_{23} erfolgt der Bruch erfahrungsgemäß in der Wirkebene der maximalen Zugspannung, d.h., $\theta_B = 45^\circ$ und $\tau_{23} = R_{\perp}^z$ (Bild 2/10). Der durch $\tau_{23} = R_{\perp}^z$ definierte Mohrsche Kreis berührt damit die Envelope im Punkt $(\sigma_n, \tau_{nt}) = (R_{\perp}^z, 0)$ und *nicht* in $(\sigma_n, \tau_{nt}) = (0, R_{\perp\perp}^P)$. Hierauf ist bei der Modellierung von Bruchbedingungen zu achten.

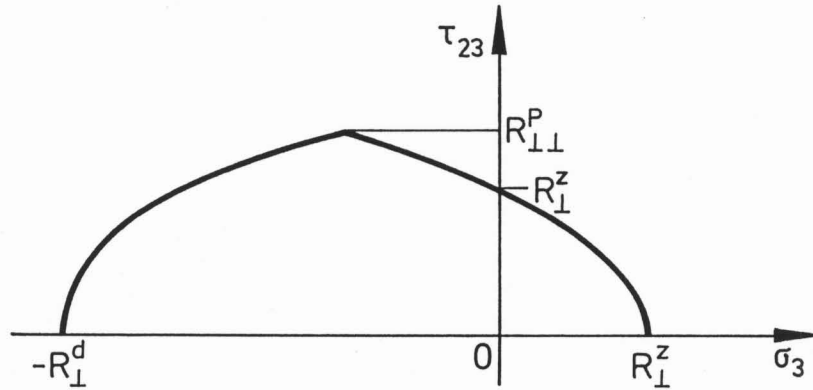


Bild 2/10: $R_{\perp\perp}^P$ ist der maximale τ_{23} -Wert der (σ_3, τ_{23}) -Bruchkurve.

2.3.2 Totraum

Bei den meisten Ansätzen werden der durch die Mohrsche Bruchbedingung gegebene Masterkörper und der Projektionskörper des erzeugten Bruchkörpers nicht identisch sein. Wir zeigen dies anhand der zylindrischen Bruchbedingung (2.31), (2.32). Dazu konstruieren wir die Envelope der Mohrschen Kreise der Bruchgrenzfläche im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum; man orientiere sich an dem in Bild 2.8 dargestellten Grundriß.

Die Mohrschen Kreise mit dem Mittelpunkt $(\sigma_2 + \sigma_3)/2 \leq M_0$ haben den Radius $R_{\perp}^d/2$. Für $(\sigma_2 + \sigma_3)/2 > M_0$ liegen die Mohrschen Kreise bis auf den gemeinsamen Berührungspunkt $(\sigma_n, \tau_{nt}) = (R_{\perp}^z, 0)$ innerhalb des Grenzkreises Γ_G mit dem Mittelpunkt M_0 (Bild 2/11). Γ_G selbst ist der Mohrsche Kreis, der zu den "Ecken" der (σ_2, σ_3) -Bruchkurve im zweiten und vierten Quadranten gehört, wo der Normal- in den Schubbruch übergeht. Damit setzt sich die Envelope aus den Geraden $\tau_{nt} = \pm R_{\perp}^d/2$ (für $\sigma_n < M_0$) und dem Grenzkreis Γ_G (für $\sigma_n \geq M_0$) zusammen.

Ein Blick auf Bild 2/11 zeigt, daß zwischen Envelope und der durch die Bruchbedingung gegebenen Masterkurve (gestrichelte Linie) eine Lücke klappt; wir sprechen von *Totraum*. Offensichtlich erzeugt jede Kurve, die für $M_0 < \sigma_n < R_{\perp}^z$ außerhalb der Envelope verläuft und in den Punkten $(\sigma_n, \tau_{nt}) = (R_{\perp}^z, 0)$, $(M_0, \pm R_{\perp}^d/2)$ in diese einmündet, im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum den gleichen Bruchkörper. Auf den allgemeinen Fall übertragen heißt das [Jel 96a]:

Tritt bei einer Mohrschen Bruchbedingung Totraum auf, so gibt es unendlich viele Masterkörper, die den entsprechenden Bruchkörper erzeugen. Der Projektionskörper ist "worst case".

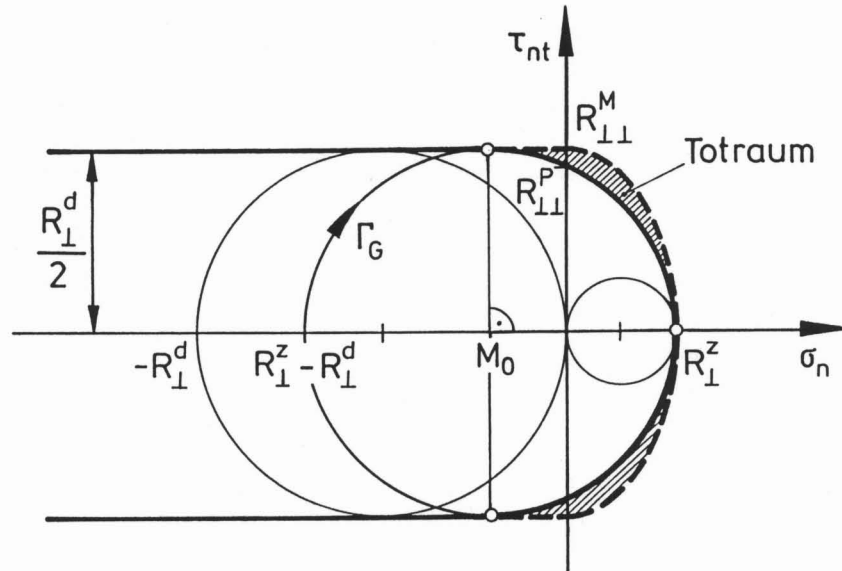


Bild 2/11: Enveloppe der Mohrschen Kreise und Schnitt des zylindrischen Masterkörpers (2.31), (2.32) in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene. Der Zwischenraum ist Totraum.

Durch Totraum können mögliche Bruchwinkel verdeckt werden. So liefert z.B. die Bruchbedingung (2.31), (2.32) für die "Ecke" $(\sigma_2, \sigma_3) = (R_\perp^z, R_\perp^z - R_\perp^d)$ die Bruchwinkel $\theta_B = 0^\circ, \pm 45^\circ$. Geht man hingegen von der Enveloppe aus, so kommen alle Winkel θ , $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$, als Bruchwinkel in Frage (s. hierzu auch Abschnitt 2.4.2).

Anmerkung. Während der Totraum in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene noch überschaubar ist, sind dessen Auswirkungen auf die Bruchgefahr für $\tau_{n1} \neq 0$ unübersichtlich. Das Totraumphänomen läßt bereits erkennen, wie sensibel der rechnerische Bruchwinkel im Halbraum $\sigma_n > 0$ auf kleine Modelländerungen reagiert (s. Abschnitte 3.2.1, 3.3, 4.4).

2.4 Die Hypothesen von Puck

2.4.1 Präzisierung der allgemeinen Mohrschen Bruchhypothese

In Anlehnung an die Coulombsche Festigkeitstheorie hat Puck in [Puc 96a] die Hypothese (H II) wie folgt präzisiert:

(H II') Wenn unter der Wirkung einer Quer-Zugspannung ($\sigma_n \geq 0$) eine faserparallele Bruchebene auftritt, so wird der Bruch gemeinsam von der auf der Bruchebene (im Augenblick des Bruches) wirkenden Quer-Zugspannung σ_n und den dort gleichzeitig wirkenden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} verursacht.

Eine auf einer Bruchebene wirkende Quer-Druckspannung ($\sigma_n < 0$) trägt nicht zur Erzeugung des Bruches bei, sondern erschwert den durch die Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} verursachten Schubbruch, indem sie einen

mit steigender Druckspannung $|\sigma_n|$ anwachsenden zusätzlichen Widerstand der Spannungs - Wirkebene gegen Schubbruch hervorruft.

Geometrisch gesehen bedeutet (HII'), daß sich die Masterfläche in Richtung $\sigma_n \rightarrow -\infty$ immer weiter öffnet (*Bild 3/1*). Eine solche Form der Masterfläche bewirkt insbesondere, daß die Bruchkurve in der (σ_2, τ_{21}) -Ebene bei wachsender Druckspannung zunächst ansteigt (*Bild 3/3*).

Puck selbst hat ursprünglich als Masterfläche für den Druckbereich den Ansatz

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - \mu_{\perp\perp}\sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel} - \mu_{\perp\parallel}\sigma_n} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n \leq 0 \quad (2.37)$$

vorgeschlagen mit positiven Parametern $\mu_{\perp\perp}, \mu_{\perp\parallel}$ [Puc 93]. Die Nenner in (2.37) werden als Widerstände der Wirkebene gegen Bruch interpretiert. Mit wachsendem $|\sigma_n|$ vergrößern sich die Widerstände; die beiden Parameter $\mu_{\perp\perp}, \mu_{\perp\parallel}$ stellen eine Art Reibungskoeffizienten dar. $R_{\perp\perp}^A$ ist der Wirkebene-Widerstand gegen Bruch infolge reiner Quer-Quer-Schubbeanspruchung. (Der Index A steht für *Action plane*.) Da $R_{\perp\perp}^A$ im allgemeinen im Totraum liegt, muß $R_{\perp\perp}^A$ als eine virtuelle und damit nicht meßbare "Festigkeit" angesehen werden. $R_{\perp\perp}^A$ wird analog wie in Abschnitt 2.2.3 über die Druckfestigkeit angepaßt. Man findet die Zusammenhänge [Fab 94]

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^d}{2} \left(\sqrt{1 + \mu_{\perp\perp}^2} - \mu_{\perp\perp} \right) = \frac{R_{\perp}^d}{2} \cotan |\theta_B^d|, \quad \mu_{\perp\perp} = -\cotan 2 |\theta_B^d|, \quad (2.38)$$

wobei θ_B^d der unter der Druckspannung $\sigma_2 = -R_{\perp}^d$ auftretende Bruchwinkel ist.

Für den Zugbereich $\sigma_n > 0$ hat Puck entsprechend (2.31) eine ellipsoidartige Kalotte gewählt (s. Abschnitt 3.2.2). In [Pli 94] und [Poh 94] wurde (2.37) durch

$$\left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - \mu_{\perp\perp}\sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel} - \mu_{\perp\parallel}\sigma_n} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n > 0 \quad (2.39)$$

ergänzt.

Da die Ansätze (2.37), (2.39) nicht homogen sind, erfordern sie einen beträchtlichen Rechenaufwand. In Abschnitt 3.2 werden auf der Basis von (HII') homogene Bruchbedingungen entwickelt.

Anmerkung. Der Durchstoßpunkt der τ_{nt} -Achse durch die Masterfläche, in (2.37), (2.39) der Wert $R_{\perp\perp}^A$, wird bei allen betrachteten Modellen über die Druckfestigkeit angepaßt. Wir bevorzugen aus diesem Grund die Bezeichnung $R_{\perp\perp}^M$, mit der die Modellabhängigkeit von der Masterfläche deutlich gemacht werden soll. Im Fall des Projektionskörpers schreiben wir $R_{\perp\perp}^P$ (s. Abschnitt 2.3.1).

2.4.2 Präzisierung der Mohrschen Bruchhypothese für die transversal-isotrope Ebene

Aufgrund seiner experimentellen Erfahrungen und der aus [Pau 61] gewonnenen Erkenntnisse hat Puck im Spezialfall der isotropen (x_2, x_3) -Ebene eine weitere Präzisierung der Mohrschen Bruchhypothese vorgenommen [Puc 96a]:

(H III) *Bei ebener Beanspruchung in der transversal-isotropen Ebene tritt der Bruch entweder als ein durch Druckspannung σ_n behinderter Schubbruch infolge τ_{nt} oder als reiner Zugbruch infolge von σ_n als größter Haupt-Zugspannung ein, je nachdem, welche Bruchmöglichkeit zuerst erreicht wird.*

Geometrisch gesehen besagt (H III), daß die Projektion des $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Bruchkörpers in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene für $\sigma_n > M$ ($M < 0$) wie in *Bild 2/11* mit einem Grenzkreis Γ_G abschließt. Das heißt, ein "Abrollen" der Mohrschen Kreise längs der Envelope wird für $\sigma_n > M$ ausdrücklich ausgeschlossen. Dies bedeutet insbesondere, daß die (σ_2, σ_3) -Bruchkurve im zweiten und vierten Quadranten eine scharfe Ecke aufweist, wobei laut Hypothese in diesen Ecken der reale Bruchwinkel von 0° bzw. 90° direkt nach $\approx \pm 45^\circ$ springt (vgl. *Bild 2/8*). (Ein Abrollen der Mohrschen Kreise würde ein Abrunden der Ecken mit stetiger Veränderung des rechnerischen Bruchwinkels zur Folge haben.)

2.5 Berücksichtigung von Eigenspannungen

Der Spannungszustand σ setze sich jetzt aus Eigenspannungen

$$\sigma^{(E)} = (\sigma_1^{(E)}, \sigma_2^{(E)}, \sigma_3^{(E)}, \tau_{23}^{(E)}, \tau_{31}^{(E)}, \tau_{21}^{(E)})^T \quad (2.40)$$

und Lastspannungen

$$\sigma^{(L)} = (\sigma_1^{(L)}, \sigma_2^{(L)}, \sigma_3^{(L)}, \tau_{23}^{(L)}, \tau_{31}^{(L)}, \tau_{21}^{(L)})^T \quad (2.41)$$

zusammen:

$$\sigma = \sigma^{(E)} + \sigma^{(L)} \quad (2.42)$$

Bei Drehung des KS um die x_1 -Achse um den Winkel θ geht der Spannungszustand über in

$$\begin{aligned} \sigma \rightarrow T(\theta)\sigma &= T(\theta)(\sigma^{(E)} + \sigma^{(L)}) \\ &= T(\theta)\sigma^{(E)} + T(\theta)\sigma^{(L)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit $T(\theta)$ aus (2.7). Dementsprechend wirkt auf der um den Winkel θ geneigten Schnittebene der Spannungsvektor

$$\sigma_n(\theta) = \sigma_n^{(E)}(\theta) + \sigma_n^{(L)}(\theta) \quad , \quad -90^\circ < \theta \leq 90^\circ, \quad (2.44)$$

wobei sich $\sigma_n^{(E)}(\theta)$, $\sigma_n^{(L)}(\theta)$ gemäß (2.17), (2.18), (2.19) berechnen. Es interessiert der sog. *lastbedingte Reservefaktor* $f_{Res}^{(L)} = f_{Res}^{(L)}(\sigma^{(E)}, \sigma^{(L)})$, für den $\sigma^{(E)} + f_{Res}^{(L)} \cdot \sigma^{(L)}$ zum Bruch auslösenden Spannungszustand wird, und der Bruchwinkel θ_B . Dabei wird - um Eindeutigkeit der Lösung sicherzustellen - vorausgesetzt, daß die Mohrsche Bruchbedingung

$$F(\sigma_n) = 1 \quad (2.45)$$

einen konvexen Masterkörper definiert. Nach (E II), Abschnitt 2.2.4, ist dann der von (2.45) erzeugte Bruchkörper im sechsdimensionalen Spannungsraum ebenfalls konvex.

Die Überlegungen von Abschnitt 2.2.2 können direkt auf diesen allgemeineren Fall übertragen werden. Zunächst gilt für $\theta = \theta_B$

$$F(\sigma_n^{(E)}(\theta_B) + f_{Res}^{(L)} \cdot \sigma_n^{(L)}(\theta_B)) = 1, \quad (2.46)$$

und für alle anderen faserparallelen Schnittebenen

$$F(\sigma_n^{(E)}(\theta) + f_{Res}^{(L)} \cdot \sigma_n^{(L)}(\theta)) \leq 1. \quad (2.47)$$

Man ermittelt nun für jeden Winkel θ , $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$, den sog. *lastbedingten Streckungsfaktor* $f_{Str}^{(L)}(\theta)$, definiert durch

$$F(\sigma_n^{(E)}(\theta) + f_{Str}^{(L)}(\theta) \sigma_n^{(L)}(\theta)) = 1. \quad (2.48)$$

Der Vergleich von (2.48) mit (2.46), (2.47) liefert

$$f_{Str}^{(L)}(\theta_B) = f_{Res}^{(L)}, \quad (2.49)$$

$$f_{Str}^{(L)}(\theta) \geq f_{Res}^{(L)}, \quad -90^\circ < \theta \leq 90^\circ. \quad (2.50)$$

Hieraus folgt analog wie in Abschnitt 2.2.2:

Der Bruchwinkel θ_B ist globale Minimalstelle des lastbedingten Streckungsfaktors $f_{Str}^{(L)}(\theta)$, $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$, und das globale Minimum ist gleich dem lastbedingten Reservefaktor $f_{Res}^{(L)}$.

Dieses Verfahren ist natürlich nur solange gerechtfertigt, als durch die Eigenspannungen keine erhebliche Vorschädigung der Matrix entstanden ist.

2.6 Abhängigkeit von der Normalspannung σ_1

Zieht man - in Abschwächung der Mohrschen Bruchhypothese - eine Beeinflussung des ZFB durch die Normalspannung σ_1 in Betracht, so wird im allgemeinen angenommen, daß sich die Schnitte $\sigma_1 = \text{const.}$ des sechsdimensionalen Bruchkörpers ähnlich verhalten [Jel 96a, Puc 96a]. Dies wird analytisch durch eine Ähnlichkeitstransformation von (2.45) der Form

$$F\left(\frac{\sigma_n}{h(\sigma_1)}\right) = 1 \quad (2.51)$$

erreicht, wobei $h(\sigma_1)$ eine für $-R_{||}^d \leq \sigma_1 \leq R_{||}^z$ positive konkave Funktion mit $h(0) = 1$ ist. Die rechnerischen Bruchwinkel eines Spannungszustandes $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$ stimmen dann mit denjenigen des Spannungszustandes $\sigma' := (0, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$ überein und zwischen den Reservefaktoren bezüglich σ und σ' besteht die Beziehung

$$\frac{f_{Res}(\sigma)}{h(f_{Res}(\sigma)\sigma_1)} = f_{Res}(\sigma'). \quad (2.52)$$

Eine lineare Abhängigkeit erhält man mittels

$$h(\sigma_1) = 1 - \frac{|\sigma_1|}{a} \quad (2.53)$$

bzw. nach (2.52) mittels

$$\frac{1}{f_{Res}(\sigma)} = \frac{1}{f_{Res}(\sigma')} + \frac{|\sigma_1|}{a}, \quad (2.54)$$

eine quadratische Abhängigkeit mittels

$$h(\sigma_1) = \sqrt{1 - \frac{\sigma_1^2}{a^2}} \quad (2.55)$$

bzw. nach (2.52) mittels

$$\frac{1}{f_{Res}^2(\sigma)} = \frac{1}{f_{Res}^2(\sigma')} + \frac{\sigma_1^2}{a^2}, \quad (2.56)$$

wobei $a > \max \{ R_{||}^z, R_{||}^d \}$.

Praxisnäher dürfte eine Abminderungsfunktion $h(\sigma_1)$ sein, wie sie Bild 2/12 zeigt. Für diese gilt

$$f_{Res}(\sigma) = f_{Res}(\sigma') \quad , \quad \text{falls} \quad 0 \leq f_{Res}(\sigma')|\sigma_1| < S^{z,d}, \quad (2.57)$$

$$\frac{1}{f_{Res}(\sigma)} = \frac{1}{A^{z,d}} \left(\frac{1}{f_{Res}(\sigma')} + (A^{z,d} - 1) \frac{|\sigma_1|}{S^{z,d}} \right), \quad (2.58)$$

falls $S^{z,d} \leq f_{Res}(\sigma')|\sigma_1| \leq R_{||}^{z,d},$

wobei für $\sigma_1 > 0$ jeweils der Index z , für $\sigma_1 < 0$ der Index d zu nehmen ist. Dieser Ansatz läßt sich natürlich beliebig verfeinern.

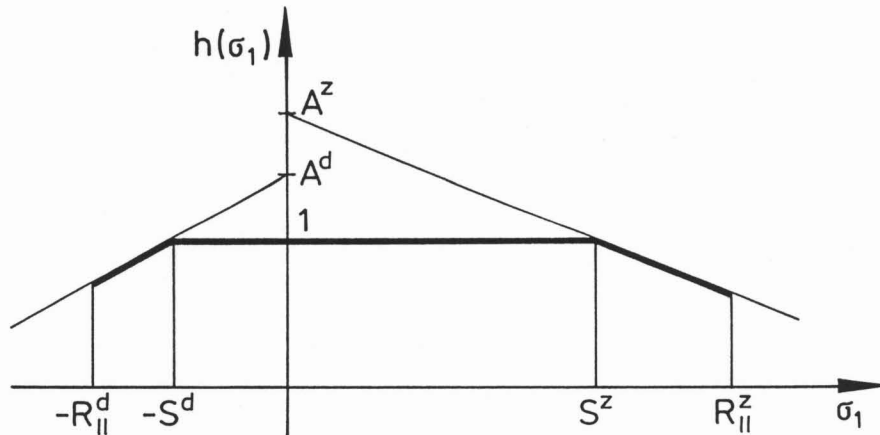


Bild 2/12: Abminderungsfunktion, mit der die Beeinflussung des ZFB durch die Normalspannung σ_1 erfaßt wird.

Wenn Eigenspannungen zu berücksichtigen sind, muß mit der Bruchbedingung (2.51) gearbeitet werden. Ist insbesondere $F(\sigma_n)$ homogen vom ersten Grad und $F(\sigma_n) \geq 0$, so bekommt man im linearen Fall gemäß (2.54) die Bruchbedingung

$$F^*(\sigma_1, \sigma_n) := F(\sigma_n) + \frac{|\sigma_1|}{a} = 1, \quad (2.59)$$

im quadratischen Fall gemäß (2.56)

$$F^*(\sigma_1, \sigma_n) := \sqrt{F^2(\sigma_n) + \frac{\sigma_1^2}{a^2}} = 1. \quad (2.60)$$

Für die in *Bild 2/12* dargestellte Funktion $h(\sigma_1)$ ergibt sich gemäß (2.57), (2.58) die Bruchbedingung

$$F^*(\sigma_1, \sigma_n) := F(\sigma_1, \sigma_n) = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq |\sigma_1| < S^{z,d}, \quad (2.61)$$

$$F^*(\sigma_1, \sigma_n) := \frac{1}{A^{z,d}} \left(F(\sigma_n) + (A^{z,d} - 1) \frac{|\sigma_1|}{S^{z,d}} \right) = 1$$

$$\text{für} \quad S^{z,d} \leq |\sigma_1| \leq R_{||}^{z,d}. \quad (2.62)$$

Bei (2.61), (2.62) ist im konkreten Fall der lastbedingte Reservefaktor für alle drei Ansätze zu ermitteln und dann der kleinste zu greifen.

3 MODELLBILDUNG [J-F, SM]

In Kapitel 3 werden verschiedene Modelle von Mohrschen Bruchbedingungen für ZFB vorgestellt. Bei den numerischen Beispielen sind als Festigkeitswerte jeweils die Mittelwerte $R_{\perp}^z = 60 \text{ MPa}$, $R_{\perp}^d = 180 \text{ MPa}$, $R_{\perp\parallel} = 80 \text{ MPa}$ gewählt worden [Puc 96a].

Die numerischen Rechnungen wurden mit dem von Zeise und Fabisch entwickelten Rechenprogramm BRUKAN durchgeführt [Zei 93, Fab 96]. Zur Darstellung der in *Farbtafel 3/1* abgebildeten dreidimensionalen Bruchkörper wurde das von Brede konzipierte Graphikprogramm BRUKAN-GRAPHIK benutzt [Bre 96].

3.1 Vorgaben für die Modellierung

Aufgrund der Erörterungen in Kapitel 2 muß ein ZFB-Kriterium vom Mohrschen Typ

$$F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) = 1 \quad (3.1)$$

folgenden Anforderungen unabdingbar genügen:

- (A I) *Die den Masterkörper charakterisierende Funktion F muß stetig sein. Erfüllt der Spannungsvektor $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})^T$ die Gl. (3.1), so muß $F(\lambda\sigma_n, \lambda\tau_{nt}, \lambda\tau_{n1}) < 1$ für $0 \leq \lambda < 1$ und $F(\lambda\sigma_n, \lambda\tau_{nt}, \lambda\tau_{n1}) > 1$ für $\lambda > 1$ gelten.*
- (A II) *Der Masterkörper muß bezüglich der (σ_n, τ_{n1}) - und der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene symmetrisch sein.*
- (A III) *Der Masterkörper muß konvex sein.*
- (A IV) *Der Masterkörper muß für $\sigma_n \geq K$ bei beliebiger Wahl von K beschränkt sein.*
- (A V) *In Richtung $\sigma_n \rightarrow -\infty$ muß die Masterfläche offen sein.*

Anmerkungen

- ad (A I): Dies sind die generellen Anforderungen, die an ein Bruchkriterium gestellt werden (s. Abschnitt 2.1.1).
- ad (A II): Dies ist gleichbedeutend mit der Invarianz der Bruchbedingung gegenüber einem Vorzeichenwechsel von τ_{nt} bzw. τ_{n1} (s. Abschnitt 2.2.1).
- ad (A III): Der durch (3.1) im sechsdimensionalen Spannungsraum erzeugte Bruchkörper ist dann konvex (s. Abschnitt 2.2.4). (Ist ein Masterkörper nicht konvex, so kommt es zu einem "Ausbeulen" von Bruchkurven, wie in *Bild 3/6* dargestellt. Das ist z.B. bei der Bruchbedingung (19) in [Puc 92c] in extremem Maße der Fall [Zei 93]).
- ad (A IV): Damit ist der durch (3.1) erzeugte Bruchkörper für $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 \geq K$ bei beliebiger Wahl von K beschränkt (s. Abschnitt 2.2.4).

ad (A V): Dadurch wird die Existenz einer Bruchebene mit reiner Druckspannung ausgeschlossen.

Zusätzlich zu (A I) - (A V) sollte ein ZFB-Kriterium (3.1) folgenden Anforderungen genügen:

(A VI) Die Funktion F muß stetig differenzierbar sein.

(A VII) In Richtung $\sigma_n \rightarrow -\infty$ muß sich die Masterfläche immer weiter öffnen, z.B. konisch oder parabolisch.

(A VIII) Die σ_n -Achse muß die Masterfläche an der Stelle $R_{\perp}^z$ durchstoßen, die τ_{n1} -Achse an der Stelle $R_{\perp\parallel}$. Der Mohrsche Kreis mit dem Mittelpunkt im KS-Ursprung und dem Radius $R_{\perp}^z$ muß bis auf den Berührungspunkt $(\sigma_n, \tau_{nt}) = (R_{\perp}^z, 0)$ innerhalb der Masterfläche verlaufen.

(A IX) Die Projektion in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene des durch (3.1) erzeugten Bruchkörpers muß für $\sigma_n > M$ ($M < 0$) mit einem Grenzkreis abschließen.

Anmerkungen

ad (A VI): Um eine größere Flexibilität der Bruchbedingung zu bekommen, können unter Umständen Knickstellen der Masterfläche zugelassen werden. Bei jeder Knickstelle entsteht aber Totraum, was zu einer Verfälschung der Bruchgefahr führt (s. Abschnitt 2.3.2).

ad (A VII): Hier geht die Hypothese (HII') von Puck ein (s. Abschnitt 2.4.1).

ad (A VIII): Damit wird der Bruchkörper a priori an die Zugfestigkeit $R_{\perp}^z$ und die Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ angepaßt. Zudem bewirkt die dritte Forderung, daß $R_{\perp\perp}^P > R_{\perp}^z$ ist (s. Abschnitt 2.3.1).

ad (A IX): Dies ist die Umsetzung der Hypothese (HIII) von Puck (s. Abschnitt 2.4.2). (A IX) wirkt sich praktisch nur auf den rechnerischen Bruchwinkel im Halbraum $\sigma_n > 0$ für kleine $|\tau_{n1}|$ -Werte aus. Da in diesem Bereich die numerische Instabilität des Bruchwinkels naturgemäß hoch ist (s. Abschnitte 3.3 und 4.4), kann (A IX) zugunsten einer besseren globalen Anpassung der Bruchbedingung fallengelassen werden.

3.2 Starre Modelle

3.2.1 Einfacher parabolischer Ansatz

Eine einfache Mohrsche Bruchbedingung bzw. einen Masterkörper, die den Vorgaben (A I) - (A V) und (A VII) genügen, erhält man, indem im Halbraum $\sigma_n < 0$ ein elliptischer Paraboloidabschnitt gewählt wird, im Halbraum $\sigma_n \geq 0$ ein Ellipsoid- oder elliptischer Paraboloid- oder elliptischer Hyperboloidabschnitt (Bild 3/1), [Jel 96a]:

$$(1 - 2p^z) \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + 2p^z \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + 2p^d \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (3.3)$$

In homogener Form lautet die Bruchbedingung

$$\sqrt{(1 - p^z)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + p^z \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (3.4)$$

$$\sqrt{(p^d)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + p^d \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (3.5)$$

Mit der Einschränkung

$$0 < p^z < 1, \quad 0 < \frac{p^d}{R_{\perp}^d} \leq \frac{p^z}{R_{\perp}^z}, \quad (3.6)$$

sind die Parameter p^z, p^d frei wählbar. (Parameter p und m mit hochgestelltem Index z beziehen sich jeweils auf den Halbraum $\sigma_n \geq 0$, mit hochgestelltem Index d auf den Halbraum $\sigma_n < 0$.) Für $0 < p^z < 1/2$ stellt (3.2) bzw. (3.4) ein Ellipsoid, für $p^z = 1/2$ ein Paraboloid und für $1/2 < p^z < 1$ ein Hyperboloid dar. p^z und p^d sind ein Maß für die Steigung der Masterfläche für $\sigma_n \downarrow 0$ bzw. $\sigma_n \uparrow 0$. Falls $p^z/R_{\perp}^z \neq p^d/R_{\perp}^d$, weist die Masterfläche an der Stelle $\sigma_n = 0$ einen Knick auf; ansonsten ist die Forderung (A VI) nach Differenzierbarkeit erfüllt.

Wird der Bruchkörper an die Druckfestigkeit $R_{\perp}^d$ angepaßt, so liefert die Berührungsbedingung für den von der Druckspannung $\sigma_2 = -R_{\perp}^d$ erzeugten Mohrschen Kreis (Bild 3/2)

$$R_{\perp\perp}^M = \frac{R_{\perp}^d}{1 + \sqrt{2p^d + 1}}, \quad (3.7)$$

und für den Bruchwinkel ergibt sich

$$\cos^2 \theta_B^d = \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^d} = \frac{1}{1 + \sqrt{2p^d + 1}}. \quad (3.8)$$

Die Steigungen $m_{\perp\parallel}^{z,d}$ der Kontur des Masterkörpers in der (σ_n, τ_{n1}) -Ebene für $\sigma_n \downarrow 0$ und $\sigma_n \uparrow 0$ bzw. die Steigungen $m_{\perp\perp}^{z,d}$ der Kontur in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene hängen mit den Steigungsparametern $p^{z,d}$ wie folgt zusammen (Bilder 3/1, 3/2, 3/3):

$$m_{\perp\parallel}^{z,d} = -\frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^{z,d}} p^{z,d}, \quad m_{\perp\perp}^{z,d} = -\frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^{z,d}} p^{z,d}. \quad (3.9)$$

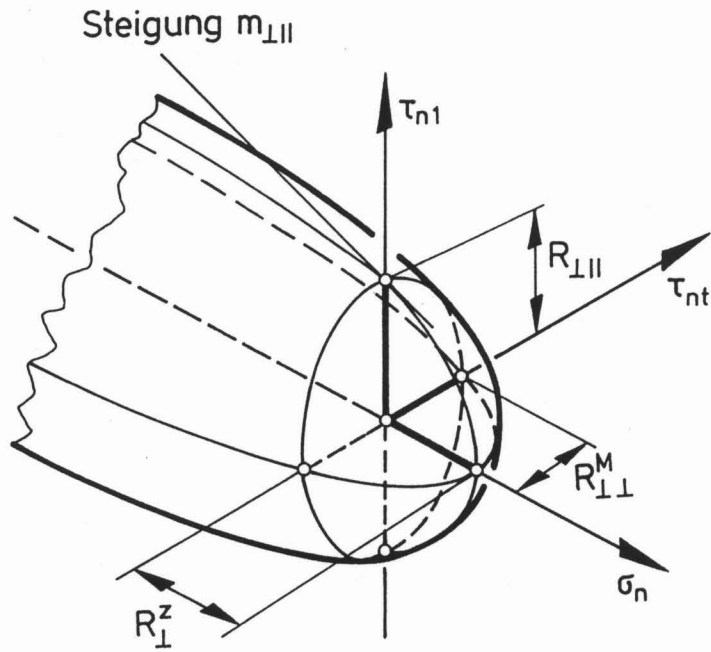


Bild 3/1: Parabolischer Masterkörper nach Gl. (3.4), (3.5).

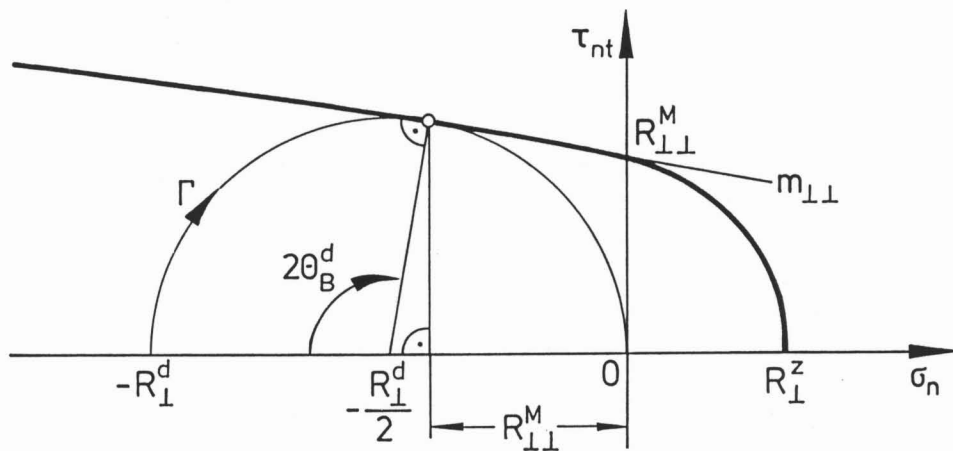


Bild 3/2: Schnitt $\tau_{n1} = 0$, $\tau_{nt} \geq 0$ des parabolischen Masterkörpers (3.4), (3.5) mit Mohrschem Druckkreis.

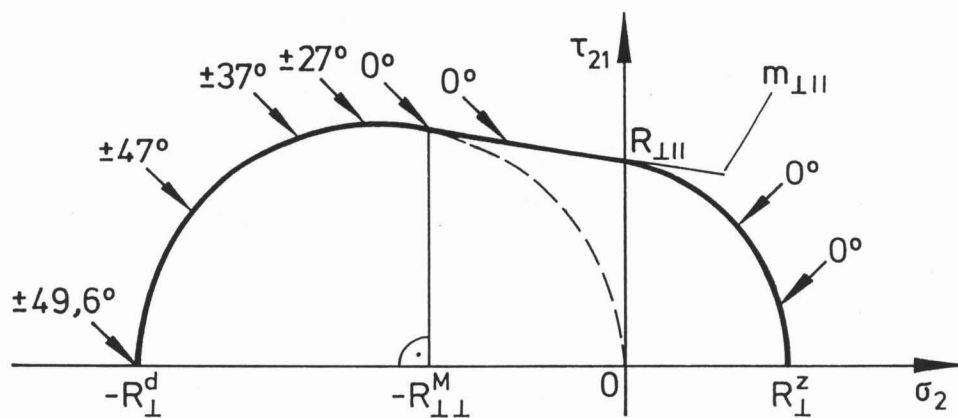


Bild 3/3: Von der Bruchbedingung (3.4), (3.5) erzeugte (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve mit Angabe der Bruchwinkel.

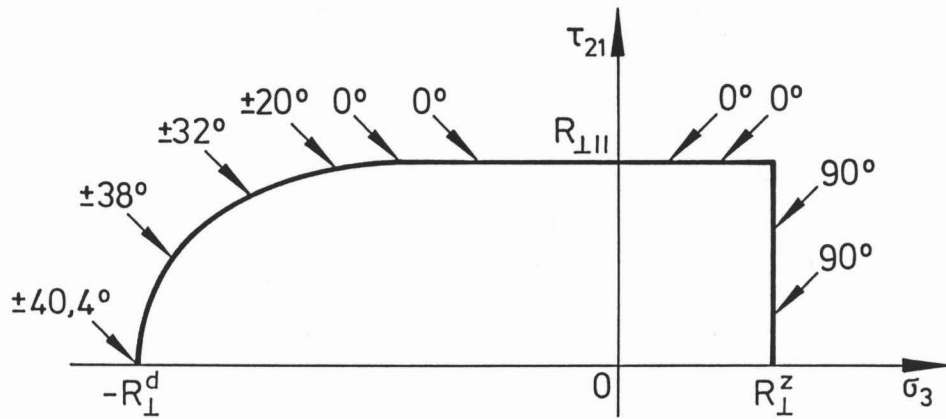


Bild 3/4: Von der Bruchbedingung (3.4), (3.5) erzeugte (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve mit Angabe der Bruchwinkel.

Wenn im konkreten Fall die Parameter $R_{\perp}^z$, $R_{\perp||}$, $R_{\perp\perp}^M$, p^z , p^d festgelegt sind, müssen die Forderungen (A VIII) und (A IX) überprüft werden.

Die Bilder 3/3, 3/4 zeigen die von der Bruchbedingung (3.4), (3.5) erzeugten Bruchkurven in der (σ_2, τ_{21}) - bzw. (σ_3, τ_{21}) -Ebene für $m_{\perp||}^{z,d} = -0,2$ (d.h. $p^z = 0,15$ und $p^d = 0,45$). Die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve kann analytisch in geschlossener Form angegeben werden [Puc 96a]: Für $-R_{\perp\perp}^M \leq \sigma_2 \leq R_{\perp}^z$ ist der Bruchwinkel $\theta_B = 0^\circ$; die Bruchkurve stimmt mit der Kontur des Masterkörpers in der (σ_n, τ_{n1}) -Ebene überein. Für $-R_{\perp}^d \leq \sigma_2 < -R_{\perp\perp}^M$ gilt für den Bruchwinkel

$$\cos^2 \theta_B = \frac{R_{\perp\perp}^M}{|\sigma_2|}; \quad (3.10)$$

die Bruchkurve ist Teil einer Ellipse durch den Nullpunkt gegeben durch

$$\left(1 + \sqrt{2p^d + 1}\right)^2 \left[\left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^d}\right)^2 + \frac{\sigma_2}{R_{\perp}^d} \right] + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp||}}\right)^2 = 0 \quad (3.11)$$

bzw. in homogener Darstellung

$$-\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^d} - \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp||} (1 + \sqrt{2p^d + 1})} \right)^2 \frac{R_{\perp}^d}{\sigma_2} = 1. \quad (3.12)$$

In Farbtafel 3/1 sind die Schnitte des von der Bruchbedingung (3.4), (3.5) erzeugten Bruchkörpers im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Raum, im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum und im $(\sigma_2, \tau_{23}, \tau_{21})$ -Raum abgebildet.

Anmerkung. Kleine Änderungen der Parameter in der Bruchbedingung können zu erheblichen Abweichungen führen. So findet man z.B. für den Spannungszustand $\sigma_2 = -44$ MPa, $\tau_{23} = -78$ MPa, $\tau_{31} = 22$ MPa im Fall $m_{\perp||}^{z,d} = -0,2$ die Werte $f_{Res} = 0,934$, $\theta_B = 88,0^\circ$ und im Fall $m_{\perp||}^{z,d} = -0,1$ die Werte $f_{Res} = 0,989$, $\theta_B = -54,9^\circ$ (s. hierzu Abschnitte 3.3 und 4.4).

3.2.2 Parabolischer Ansatz von Puck

Beim einfachen parabolischen Ansatz (3.4), (3.5) sind die Steigungen $m_{\perp\parallel}^z$, $m_{\perp\perp}^z$ bzw. $m_{\perp\parallel}^d$, $m_{\perp\perp}^d$ jeweils gemäß (3.9) durch

$$\frac{m_{\perp\parallel}^{z,d}}{R_{\perp\parallel}} = \frac{m_{\perp\perp}^{z,d}}{R_{\perp\perp}^M} \quad (3.13)$$

gekoppelt. Dies bedeutet eine Einschränkung der Flexibilität des Modells gegenüber dem ursprünglichen Ansatz (2.37), (2.39). Um vier freie Steigungsparameter zu haben, hat Puck den einfachen parabolischen Ansatz wie folgt modifiziert [Puc 96a]:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{R_{\perp}^z} - q^z\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + q^z \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (3.14)$$

$$\sqrt{(q^d \sigma_n)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + q^d \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0, \quad (3.15)$$

wobei

$$\begin{aligned} q^{z,d} &:= \frac{p_{\perp\perp}^{z,d}}{R_{\perp\perp}^M} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{z,d}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2 \psi \quad \left(\psi := \arctan \frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}} \right) \\ &= \frac{1}{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2} \left(\frac{p_{\perp\perp}^{z,d}}{R_{\perp\perp}^M} \tau_{nt}^2 + \frac{p_{\perp\parallel}^{z,d}}{R_{\perp\parallel}} \tau_{n1}^2 \right), \quad \text{falls } \tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

(Für $\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2 = 0$ wird $q^{z,d} = 0$ gesetzt.) Die vier Steigungsparameter $p_{\perp\parallel}^{z,d}$, $p_{\perp\perp}^{z,d}$ entsprechen hier gerade den absoluten Steigungen der Konturen des Masterkörpers in der (σ_n, τ_{n1}) - bzw. (σ_n, τ_{nt}) -Ebene für $\sigma_n \downarrow 0$ und $\sigma_n \uparrow 0$:

$$m_{\perp\parallel}^{z,d} = -p_{\perp\parallel}^{z,d}, \quad m_{\perp\perp}^{z,d} = -p_{\perp\perp}^{z,d}. \quad (3.17)$$

Mit der Einschränkung

$$0 < p_{\perp\parallel}^d \leq p_{\perp\parallel}^z < \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^z}, \quad 0 < p_{\perp\perp}^d \leq p_{\perp\perp}^z < \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^z} \quad (3.18)$$

sind $p_{\perp\parallel}^{z,d}$, $p_{\perp\perp}^{z,d}$ frei wählbar. Anpassung des Bruchkörpers an die Druckfestigkeit $R_{\perp}^d$ liefert

$$R_{\perp\perp}^M = \frac{R_{\perp}^d}{2(1 + p_{\perp\perp}^d)}, \quad \cos^2 \theta_B^d = \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^d} = \frac{1}{2(1 + p_{\perp\perp}^d)}. \quad (3.19)$$

Die Bruchbedingung (3.14), (3.15) ist homogen und genügt den Anforderungen (A I), (A II), (A IV), (A V), (A VII). Die Forderung (A VI) nach Differenzierbarkeit ist höchstens für $\sigma_n = 0$ verletzt. Durch geeignete Wahl der Parameter $p_{\perp\perp}^{z,d}$ können (A VIII) und (A IX) immer erfüllt werden.

Hingegen ist der durch (3.14), (3.15) definierte Masterkörper nicht mehr konvex mit Ausnahme des Spezialfalles

$$\frac{p_{\perp\perp}^{z,d}}{R_{\perp\perp}^M} = \frac{p_{\perp\parallel}^{z,d}}{R_{\perp\parallel}}, \quad (3.20)$$

welcher dem einfachen parabolischen Ansatz entspricht. Denn durch die Konstruktion (3.16) von $q^{z,d}$ wird der beim einfachen Ansatz elliptische Querschnitt mit einer harmonischen Schwingung überlagert. Dadurch kommt es für $\sigma_n \rightarrow -\infty$ zur Einschnürung des Querschnittes. In der Praxis dürfte daher die Bruchbedingung (3.14), (3.15) nur in eingeschränktem Umfang verwendbar sein.

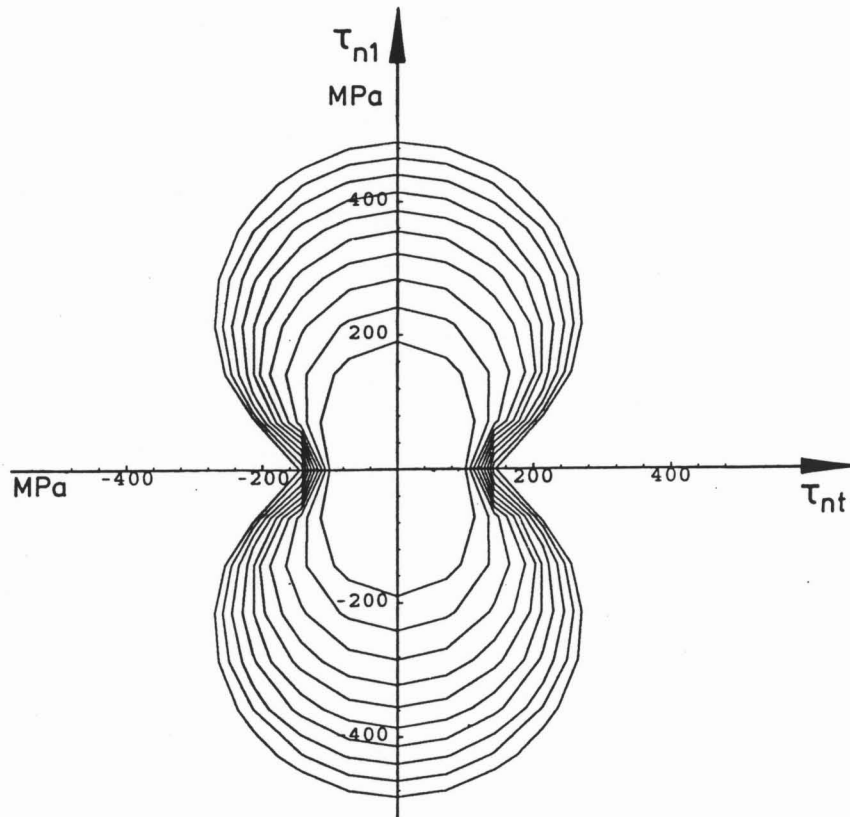


Bild 3/5: Querschnitte $\sigma_n = \text{const.}$ des Masterkörpers (3.14), (3.15) für $p_{\perp\parallel}^{z,d} = 0, 2$, $p_{\perp\perp}^{z,d} = 0, 01$, $-8000 \text{ MPa} \leq \sigma_n \leq -200 \text{ MPa}$.

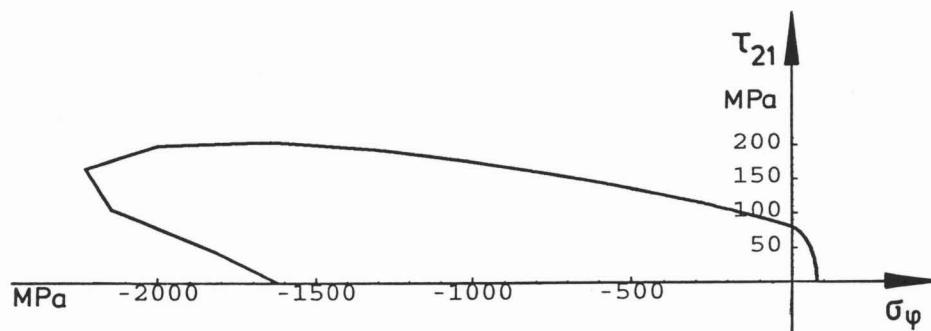


Bild 3/6: Von der Bruchbedingung (3.14), (3.15) erzeugte Bruchkurve in der $(\sigma_\varphi, \tau_{21})$ -Ebene für $p_{\perp\parallel}^{z,d} = 0, 2$, $p_{\perp\perp}^{z,d} = 0, 01$, $\varphi = 40^\circ$.

Den *Bildern 3/5* und *3/6* liegen die Standardwerte $R_{\perp}^z = 60 \text{ MPa}$, $R_{\perp}^d = 180 \text{ MPa}$, $R_{\perp\parallel} = 80 \text{ MPa}$ und die Steigungsparameter $p_{\perp\parallel}^{z,d} = 0,2$, $p_{\perp\perp}^{z,d} = 0,01$ zugrunde. In *Bild 3/5* sind die Querschnitte des Masterkörpers für $-8000 \text{ MPa} \leq \sigma_n \leq -200 \text{ MPa}$ dargestellt. *Bild 3/6* zeigt die Auswirkung der Einschnürung auf die Bruchkurve in der (σ_n, τ_{21}) -Ebene, wo $|\sigma_\varphi| = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}$, $\sigma_3 / \sigma_2 = \tan \varphi = \text{const.}$, für $\varphi = 40^\circ$.

3.2.3 Allgemeiner parabolischer Ansatz

Beim ursprünglichen Ansatz (2.37), (2.39) einer Mohrschen Bruchbedingung sind die Konturen des Masterkörpers in der (σ_n, τ_{n1}) - bzw. (σ_n, τ_{nt}) -Ebene für $\sigma_n < 0$ Geraden, so daß sich die Masterfläche in Richtung $\sigma_n \rightarrow -\infty$ kegelartig öffnet. Ein paraboloidartiges Verhalten erreicht man, indem als Konturen Parabeln gewählt werden. Dies führt zu dem Ansatz

$$\left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M \sqrt{1 - 2p_{\perp\perp}^z \sigma_n / R_{\perp}^z}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel} \sqrt{1 - 2p_{\perp\parallel}^z \sigma_n / R_{\perp}^z}}\right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (3.21)$$

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M \sqrt{1 - 2p_{\perp\perp}^d \sigma_n / R_{\perp}^d}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel} \sqrt{1 - 2p_{\perp\parallel}^d \sigma_n / R_{\perp}^d}}\right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (3.22)$$

Für die Steigungsparameter $p_{\perp\parallel}^{z,d}$, $p_{\perp\perp}^{z,d}$ gelten die Einschränkungen

$$0 < p_{\perp\parallel}^z, p_{\perp\perp}^z < \frac{1}{2}, \quad 0 < \frac{p_{\perp\parallel}^d}{R_{\perp}^d} \leq \frac{p_{\perp\parallel}^z}{R_{\perp}^z}, \quad 0 < \frac{p_{\perp\perp}^d}{R_{\perp}^d} \leq \frac{p_{\perp\perp}^z}{R_{\perp}^z}. \quad (3.23)$$

Anpassung des Bruchkörpers an die Druckfestigkeit $R_{\perp}^d$ liefert

$$R_{\perp\perp}^M = \frac{R_{\perp}^d}{1 + \sqrt{2p_{\perp\perp}^d + 1}}, \quad \cos^2 \theta_B^d = \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^d} = \frac{1}{1 + \sqrt{2p_{\perp\perp}^d + 1}}. \quad (3.24)$$

Die Steigungen der Konturen des Masterkörpers in der (σ_n, τ_{n1}) - bzw. (σ_n, τ_{nt}) -Ebene für $\sigma_n \downarrow 0$ und $\sigma_n \uparrow 0$ hängen mit den Steigungsparametern gemäß

$$m_{\perp\parallel}^{z,d} = -\frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^{z,d}} p_{\perp\parallel}^{z,d}, \quad m_{\perp\perp}^{z,d} = -\frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^{z,d}} p_{\perp\perp}^{z,d}. \quad (3.25)$$

zusammen.

Die Vorgaben (A I) - (A V), (A VII) - (A IX) sind alle erfüllt bzw. erfüllbar. Die Forderung (A VI) nach Differenzierbarkeit ist höchstens für $\sigma_n = 0$ verletzt.

Der Nachteil der Bruchbedingung liegt darin, daß sich die Gl. (3.21), (3.22) nicht in eine geschlossene homogene Form umwandeln lassen. Damit ist die Ermittlung des Reservefaktors mit einem beträchtlichen Rechenaufwand verbunden.

3.2.4 Der Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ - Raum

Der von einer Mohrschen Bruchbedingung erzeugte Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Raum weist entsprechend den verschiedenen Bruchmodi eine charakteristische geometrische Gestalt auf (*Farbtafel 3/1, Bild 1*). Für einfache Ansätze kann der Bruchkörper analytisch erfaßt werden (vgl. hierzu Abschnitt 9.5.2 in [Puc 96a]).

Zylindrischer Ansatz. Der Masterkörper sei aus einem elliptischen Zylinder und einem Rotationsellipsoid mit der Rotationsachse parallel zur τ_{n1} -Achse durch $\sigma_n = M_0$ zusammengesetzt (*Bilder 3/7, 3/8*):

$$\left(\frac{\sigma_n - M_0}{C_{\perp\perp}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{C_{\perp\perp}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{C_{\perp\parallel}}\right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq M_0, \quad (3.26)$$

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{C_{\perp\perp}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{C_{\perp\parallel}}\right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n < M_0, \quad (3.27)$$

wobei

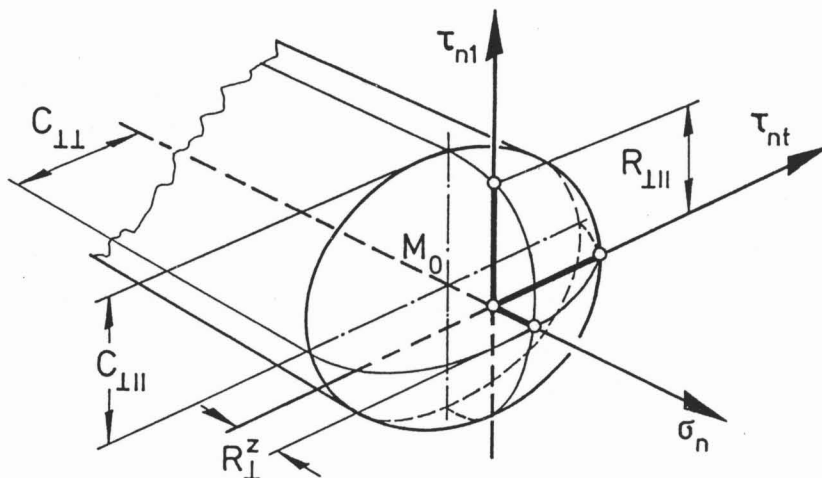


Bild 3/7: Zylindrischer Masterkörper nach Gl. (3.26), (3.27).

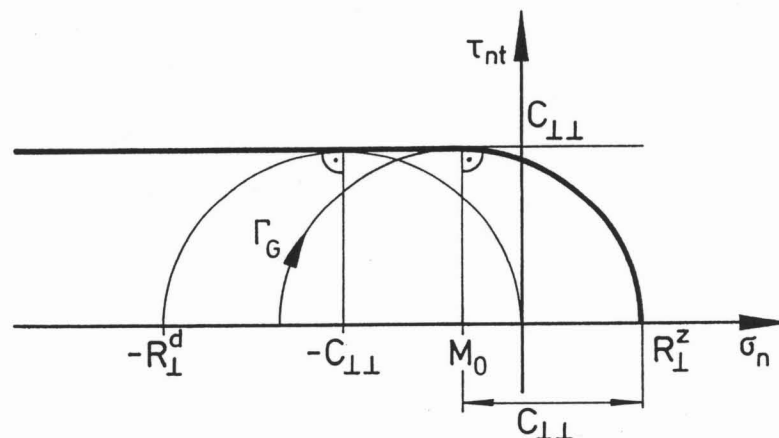


Bild 3/8: Schnitt $\tau_{n1} = 0$, $\tau_{nt} \geq 0$ des Masterkörpers (3.26), (3.27) mit Mohrschem Druck- und Grenzkreis.

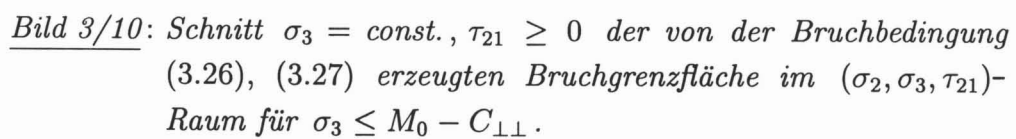
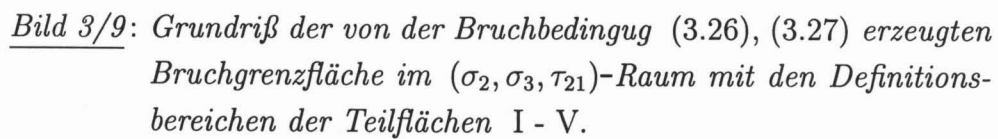
$$C_{\perp\perp} = \frac{R_{\perp}^d}{2} \quad , \quad M_0 = R_{\perp}^z - C_{\perp\perp} \quad , \quad C_{\perp\parallel} = \frac{R_{\perp\parallel}}{\sqrt{1 - (M_0 / C_{\perp\perp})^2}} \quad . \quad (3.28)$$

Wegen der Wahl eines Rotationsellipsoids (3.26) für $\sigma_n \geq M_0$ tritt kein Totraum auf.

Die durch (3.26), (3.27) definierte Bruchgrenzfläche im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Raum setzt sich dann aus folgenden fünf Teilflächen I - V zusammen:

$$\begin{aligned} \text{I : } & \begin{cases} \sigma_3 = R_{\perp}^z \\ \{ (\sigma_2, \tau_{21}) \mid \left(\frac{\sigma_2 - M_0}{C_{\perp\perp}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{C_{\perp\parallel}} \right)^2 \leq 1 \} \end{cases} \\ \text{IIa : } & \begin{cases} \tau_{21}^2 = C_{\perp\parallel}^2 \\ \{ (\sigma_2, \sigma_3) \mid M_0 - C_{\perp\perp} \leq \sigma_3 \leq R_{\perp}^z \quad , \quad \sigma_3 - C_{\perp\perp} \leq \sigma_2 \leq M_0 \} \end{cases} \\ \text{IIb : } & \begin{cases} \tau_{21}^2 = C_{\perp\parallel}^2 \\ \{ (\sigma_2, \sigma_3) \mid \sigma_3 \leq M_0 - C_{\perp\perp} \quad , \quad \sigma_3 - C_{\perp\perp} \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 + C_{\perp\perp} \} \end{cases} \\ \text{III : } & \begin{cases} \left(\frac{\sigma_2 - M_0}{C_{\perp\perp}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{C_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1 \\ \{ (\sigma_2, \sigma_3) \mid M_0 - C_{\perp\perp} \leq \sigma_3 \leq R_{\perp}^z \quad , \quad M_0 \leq \sigma_2 \leq R_{\perp}^z \} \end{cases} \\ \text{IV : } & \begin{cases} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3 - C_{\perp\perp}}{C_{\perp\perp}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{C_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1 \\ \{ (\sigma_2, \sigma_3) \mid \sigma_3 \leq M_0 - C_{\perp\perp} \quad , \quad \sigma_3 + C_{\perp\perp} \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 + 2C_{\perp\perp} \} \end{cases} \\ \text{V : } & \begin{cases} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3 + C_{\perp\perp}}{C_{\perp\perp}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{C_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1 \\ \{ (\sigma_2, \sigma_3) \mid \sigma_3 \leq R_{\perp}^z \quad , \quad \sigma_3 - 2C_{\perp\perp} \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 - C_{\perp\perp} \} . \end{cases} \end{aligned}$$

Bild 3/9 zeigt den Grundriß der Bruchgrenzfläche mit den Definitionsbereichen der Teilflächen. Die Stirnseite I fällt senkrecht ab, II sind horizontale Ebenen. III ist ein Halbzylinder in Richtung σ_3 -Achse, IV und V sind Halbzylinder in Richtung $\sigma_2 = \sigma_3$. Bild 3/10 zeigt den Aufriß an der Schnittstelle S . In den Bildern 3/11, 3/12 ist die (σ_2, τ_{21}) - bzw. (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve dargestellt. Die Übergänge der Teilfläche II zu den Teilflächen III, IV, V sind stetig differenzierbar. Auf den Teilflächen II und III ist der Bruchwinkel 0° , auf der Stirnseite I $+90^\circ$. Auf den Teilflächen IV und V variiert der Bruchwinkel zwischen 0° und $\pm 45^\circ$.



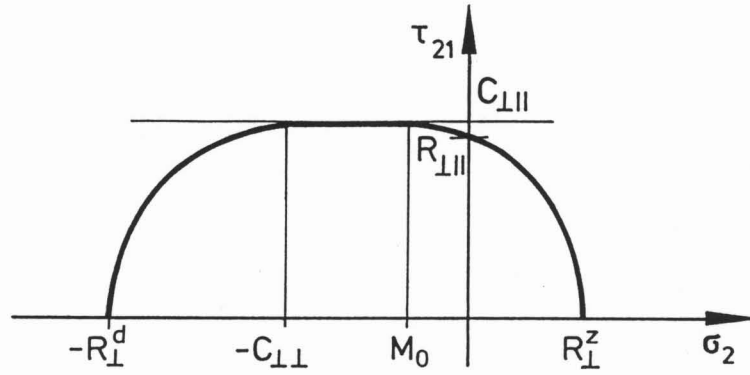


Bild 3/11: Von der Bruchbedingung (3.26), (3.27) erzeugte (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve.

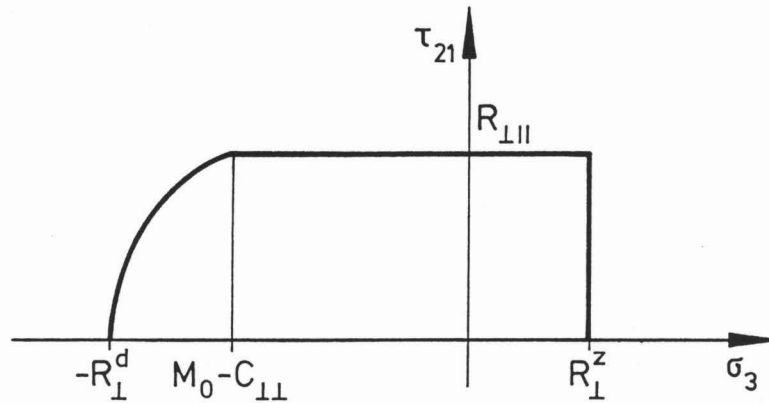


Bild 3/12: Von der Bruchbedingung (3.26), (3.27) erzeugte (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve.

Parabolischer Ansatz. Wird der Masterkörper aus einem elliptischen Paraboloidabschnitt und einem Rotationsellipsoid zusammengesetzt, so sieht der Grundriß der Bruchgrenzfläche analog aus. Die um 45° geneigten Geraden in *Bild 3/9* sind dann Parabeläste. Beim Schnitt S steigt das Mittelstück in Richtung $\sigma_2 \rightarrow -\infty$ parabelförmig an; links und rechts schließen sich Ellipsenbogen stetig differenzierbar an.

Anmerkung. In [Jel 96b] wird auf der Basis der analytischen Darstellung der Bruchgrenzfläche im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Raum eine Invariantengleichung aufgestellt, welche die Bruchbedingung (3.26), (3.27) angenähert wiedergibt. Der Rechenaufwand zur Ermittlung des Reservefaktors kann dadurch im Verhältnis 20 : 1 reduziert werden.

3.2.5 Der Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ - Raum

Zylindrischer Ansatz. Die beiden zylindrischen Ansätze (2.31), (2.32) und (3.26), (3.27) erzeugen in der (σ_2, σ_3) -Ebene die gleiche Bruchkurve (vgl. *Bilder 2/8* und *3/9*). Durch die (σ_2, σ_3) -Bruchkurve ist der Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum festgelegt; die vertikalen Schnitte in Richtung $\sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.}$ sind Ellipsen (s. Abschnitt 2.3.1).

Wir beschreiben den Bruchkörper mittels einer Invariantengleichung. Dazu stellen wir den von einem beliebigen Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})^T$ erzeugten Mohrschen Kreis mittels der

Invarianten I_2, I_3 dar. Der Mittelpunkt σ_c und der Radius r des Mohrschen Kreises berechnen sich unter Verwendung von (2.15) zu (*Bild 2/2*)

$$\sigma_c = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{I_2}{2}, \quad (3.29)$$

$$r^2 = \tau_{23}^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \right)^2 = I_3 + \frac{I_2^2}{4}. \quad (3.30)$$

In *Bild 2/11* liest man nun die Berührungsbedingung für den Mohrschen Kreis direkt ab. Es gilt

$$r^2 = (R_{\perp}^z - \sigma_c)^2 \quad \text{für } \sigma_c \geq M_0,$$

$$r^2 = \left(\frac{R_{\perp}^d}{2} \right)^2 \quad \text{für } \sigma_c < M_0$$

oder, ausgedrückt in den Invarianten,

$$\left(\frac{1}{R_{\perp}^z} \right)^2 I_3 + \frac{I_2}{R_{\perp}^z} = 1 \quad \text{für } I_2 \geq 2M_0, \quad (3.31)$$

$$\left(\frac{2}{R_{\perp}^d} \right)^2 I_3 + \left(\frac{I_2}{R_{\perp}^d} \right)^2 = 1 \quad \text{für } I_2 < 2M_0. \quad (3.32)$$

Parabolischer Ansatz. Wir gehen vom einfachen parabolischen Ansatz (3.2), (3.3) aus. Dabei nehmen wir an, daß die Projektion des erzeugten Bruchkörpers in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene gemäß der Hypothese (H III) (Abschnitt 2.4.2) durch einen Grenzkreis Γ_G abgeschlossen wird, der stetig differenzierbar in die durch (3.3) definierte Parabel übergeht (*Bild 3/13*). Die Parabel ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_{nt}^2 &= (R_{\perp\perp}^M)^2 \left(1 - 2p^d \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} \right) \\ &= (R_{\perp\perp}^M)^2 - 2\rho \sigma_n, \end{aligned} \quad (3.33)$$

wobei

$$\rho = (R_{\perp\perp}^M)^2 \frac{p^d}{R_{\perp}^d} \quad (3.34)$$

der Krümmungsradius im Scheitel ist. Für Mittelpunkt M_0 und Radius r_G des Grenzkreises Γ_G findet man

$$M_0 = R_{\perp}^z - \sqrt{(R_{\perp\perp}^M)^2 - 2\rho R_{\perp}^z} - \rho, \quad (3.35)$$

$$r_G = R_{\perp}^z - M_0. \quad (3.36)$$

Wie beim zylindrischen Ansatz führt der Grenzkreis Γ_G für $I_2 \geq 2M_0$ auf die Invariantengleichung (3.31), d.h., es gilt

$$\left(\frac{1}{R_z^+}\right)^2 I_3 + \frac{I_2}{R_z^+} = 1 \quad \text{für} \quad I_2 \geq 2M_0. \quad (3.37)$$

Zur Herleitung der Invariantengleichung des Bruchkörpers für $I_2 < 2M_0$ benutzen wir die Normalform des Mohrschen Kreises ausgedrückt in den Invarianten:

$$\left(\sigma_n - \frac{I_2}{2}\right)^2 + \tau_{nt}^2 = I_3 + \frac{I_2^2}{4}. \quad (3.38)$$

Die Berührungsbedingung liefert für den Berührungspunkt $(\sigma_n^{(0)}, \tau_{nt}^{(0)})$ (die Gradienten an die beiden Kurven (3.33), (3.38) müssen kollinear sein)

$$(2\rho, 2\tau_{nt}^{(0)}) = \lambda (2\sigma_n^{(0)} - I_2, 2\tau_{nt}^{(0)}) \quad (3.39)$$

mit einem Faktor λ . Hieraus ergibt sich unmittelbar $\lambda = 1$,

$$\sigma_n^{(0)} = \frac{I_2}{2} + \rho \quad (3.40)$$

und damit wegen (3.38)

$$(\tau_{nt}^{(0)})^2 = I_3 + \frac{I_2^2}{4} - \rho^2. \quad (3.41)$$

Indem man (3.40), (3.41) in (3.33) einsetzt, erhält man die Invariantengleichung

$$\left(\frac{1}{R_{\perp}^M}\right)^2 \left(I_3 + \frac{I_2^2}{4} + \rho^2 + \rho I_2\right) = 1 \quad \text{für} \quad I_2 < 2M_0. \quad (3.42)$$

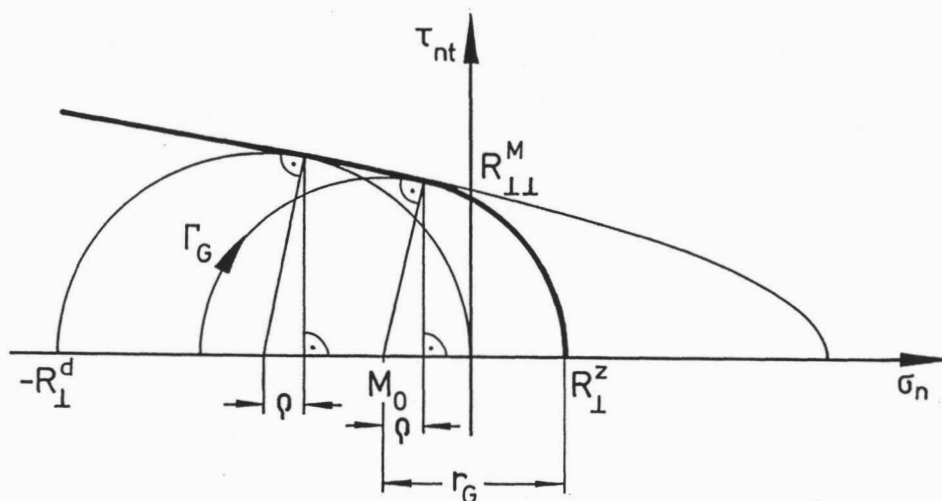


Bild 3/13: Schnitt $\tau_{n1} = 0$, $\tau_{nt} \geq 0$ eines parabolischen Masterkörpers mit abschließendem Mohrschen Grenzkreis Γ_G und Mohrschem Druckkreis.

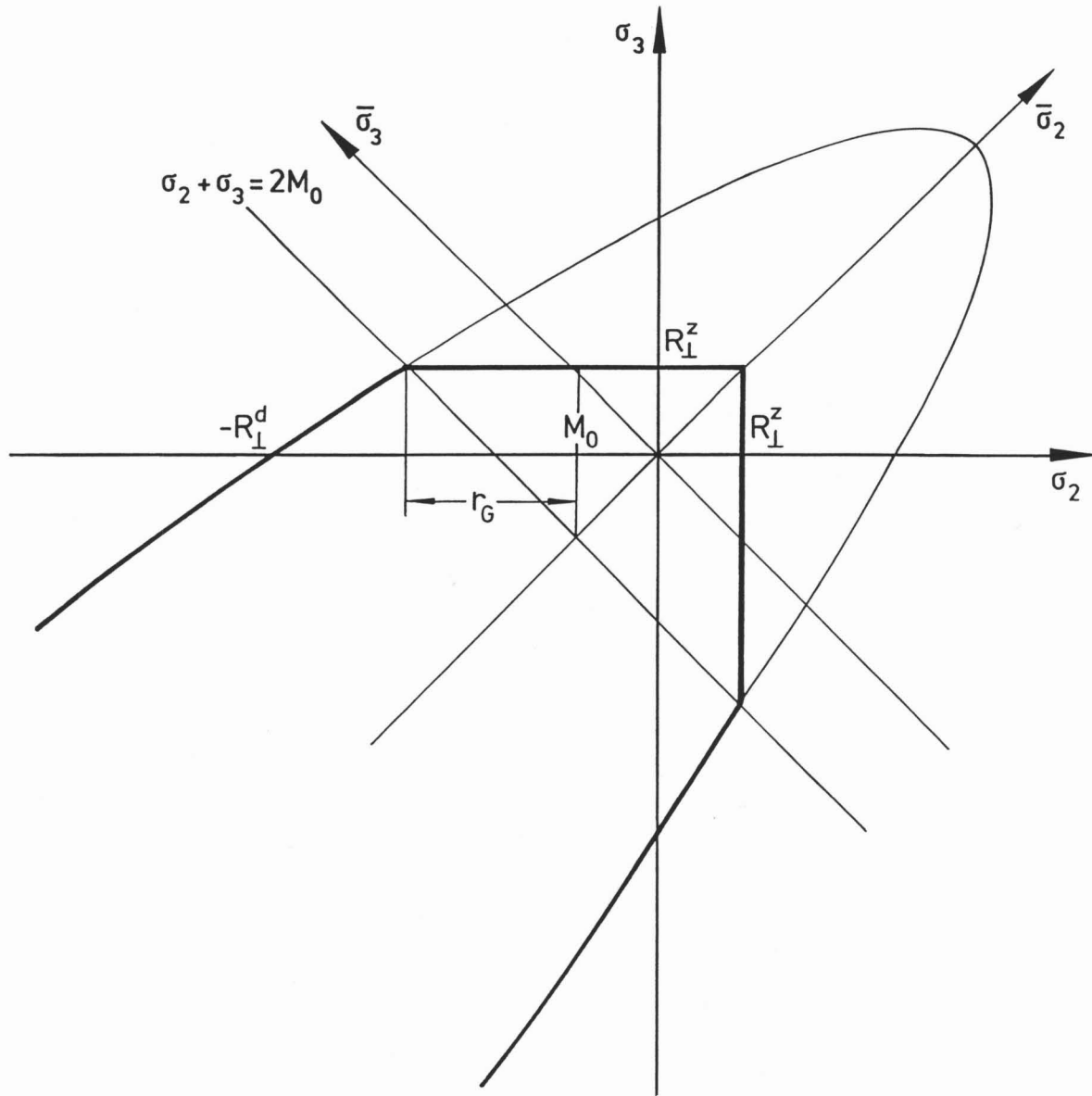


Bild 3/14: (σ_2, σ_3) -Bruchkurve nach Gl. (3.37) und (3.42).

Insbesondere ergibt sich aus (3.42) für die (σ_2, σ_3) -Ebene

$$\bar{\sigma}_3^2 = 2 \left[(R_{\perp\perp}^M)^2 - \rho^2 - \sqrt{2} \rho \bar{\sigma}_2 \right], \quad (3.43)$$

wobei

$$\bar{\sigma}_2 := \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\sigma}_3 := \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sqrt{2}}. \quad (3.44)$$

Gleichung (3.43) stellt eine Parabel mit der Symmetrieachse $\sigma_2 = \sigma_3$ dar; der Krümmungsradius im Scheitel ist $\rho^* := \sqrt{2} \rho$ (Bild 3/14).

3.3 Elastische Modelle

Wie bereits in Abschnitt 2.3.2 ersichtlich, reagiert der *rechnerische* Bruchwinkel im Halbraum $\sigma_n > 0$ auf kleine Modelländerungen außerordentlich sensibel. Zur Abschätzung des *realen* Bruchwinkels wird eine Methode entwickelt, die eine gesicherte Aussage erlaubt. Der Grundgedanke ist dabei der folgende. Die *reale* (unbekannte) Masterfläche wird zwischen einer zu kleinen

und einer zu großen Masterfläche eingeschlossen; wir sprechen von *minimaler* und *maximaler Masterfläche* bzw. *minimalem* und *maximalem Masterkörper*. Wenn nun die minimale Masterfläche stetig ausgedehnt wird bis sie mit der maximalen übereinstimmt, so wird bei diesem Dehnungsprozeß die reale Masterfläche überstrichen. Damit wird beim Dehnungsprozeß auch der reale Bruchwinkel erfaßt.

3.3.1 Minimaler und maximaler Masterkörper

Im Halbraum $\sigma_n < 0$ setzen wir für den minimalen und den maximalen Masterkörper den gleichen Paraboloidabschnitt (3.3) an:

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + 2p^d \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0 \quad (3.45)$$

mit

$$R_{\perp\perp}^M = \frac{R_{\perp}^d}{1 + \sqrt{2p^d + 1}}. \quad (3.46)$$

Für $\sigma_n \geq 0$ geben wir in der (σ_n, τ_{n1}) -Ebene die gleiche elliptische Kontur vor (vgl. (3.2), Bild 3/15):

$$(1 - 2p^z) \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + 2p^z \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (3.47)$$

wobei

$$0 < p^z < \frac{1}{2}, \quad 0 < \frac{p^d}{R_{\perp}^d} \leq \frac{p^z}{R_{\perp}^z}. \quad (3.48)$$

Der Ellipsenpunkt auf der Höhe τ_{n1} hat dann von der τ_{n1} -Achse den Abstand (Bild 3/15)

$$R(\tau_{n1}) = \frac{R_{\perp}^z}{1 - 2p^z} \left(-p^z + \sqrt{(p^z)^2 + (1 - 2p^z) \left[1 - \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 \right]} \right). \quad (3.49)$$

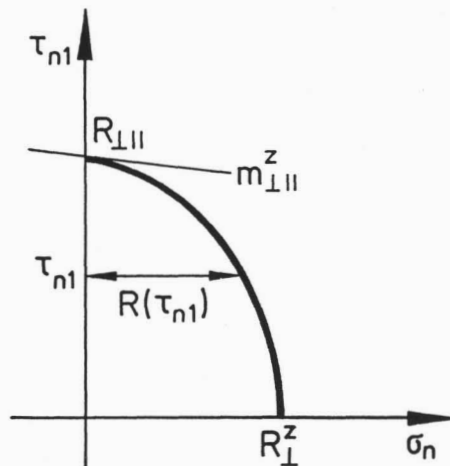


Bild 3/15: Elliptische Kontur des minimalen und maximalen Masterkörpers in der (σ_n, τ_{n1}) -Ebene für $\sigma_n \geq 0, \tau_{n1} \geq 0$.

Die Steigungen der Konturen des Paraboloides für $\sigma_n \uparrow 0$ bzw. der elliptischen Kontur für $\sigma_n \downarrow 0$ berechnen sich nach (3.9) zu

$$m_{\perp\parallel}^{z,d} = -\frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^{z,d}} p^{z,d} \quad , \quad m_{\perp\perp}^d = -\frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^d} p^d . \quad (3.50)$$

Minimaler Masterkörper. Der minimale Masterkörper wird nun wie folgt konstruiert. Beim Schnitt $\tau_{n1} = \text{const.}$ ($|\tau_{n1}| < R_{\perp\parallel}$) wird die durch (3.45) definierte Parabel mittels eines Grenzkreises abgeschlossen, der durch den Ellipsenpunkt $\sigma_n = R(\tau_{n1})$ geht und sich stetig differenzierbar an die Parabel anschließt (*Bild 3/16*). Bezeichnet h die Höhe der Parabel an der Stelle $\sigma_n = R(\tau_{n1})$,

$$h = h(\tau_{n1}) = R_{\perp\perp}^M \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 - 2p^d \frac{R(\tau_{n1})}{R_{\perp}^d}} , \quad (3.51)$$

so berechnen sich die Anschlußstelle A , der Radius r und der Mittelpunkt M_0 des Grenzkreises zu

$$A = A(\tau_{n1}) = R(\tau_{n1}) - h(\tau_{n1}) , \quad (3.52)$$

$$r = r(\tau_{n1}) = h(\tau_{n1}) + \frac{p^d (R_{\perp\perp}^M)^2}{R_{\perp}^d} , \quad (3.53)$$

$$M_0 = M_0(\tau_{n1}) = R(\tau_{n1}) - r(\tau_{n1}) . \quad (3.54)$$

Damit ergibt sich als Definitionsgleichung des minimalen Masterkörpers

$$\left(\frac{\sigma_n - R(\tau_{n1})}{r(\tau_{n1})} + 1\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{r(\tau_{n1})}\right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq A(\tau_{n1}) , \quad (3.55)$$

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + 2p^d \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < A(\tau_{n1}) . \quad (3.56)$$

(Für $|\tau_{n1}| \geq R_{\perp\parallel}$ wird $A(\tau_{n1}) = 0$ gesetzt.)

Der minimale Masterkörper weist keinen Totraum auf. Er ist nach der Hypothese (H III) von Puck kleiner als der reale Masterkörper.

Maximaler Masterkörper. Gl (3.47) beschreibt im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum einen elliptischen Halbzylinder, der senkrecht zur (σ_n, τ_{n1}) -Ebene steht. Den maximalen Masterkörper konstruieren wir folgendermaßen. Der Paraboloidabschnitt (3.45) wird in den Halbraum $\sigma_n \geq 0$ fortgesetzt und mittels des elliptischen Halbzylinders (3.47) abgeschlossen (in *Bild 3/16* gestrichelte Linie). Für die Definitionsgleichung schreiben wir (3.45) in homogener Form:

$$F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) := \sqrt{(p^d)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + p^d \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} = 1 ; \quad (3.57)$$

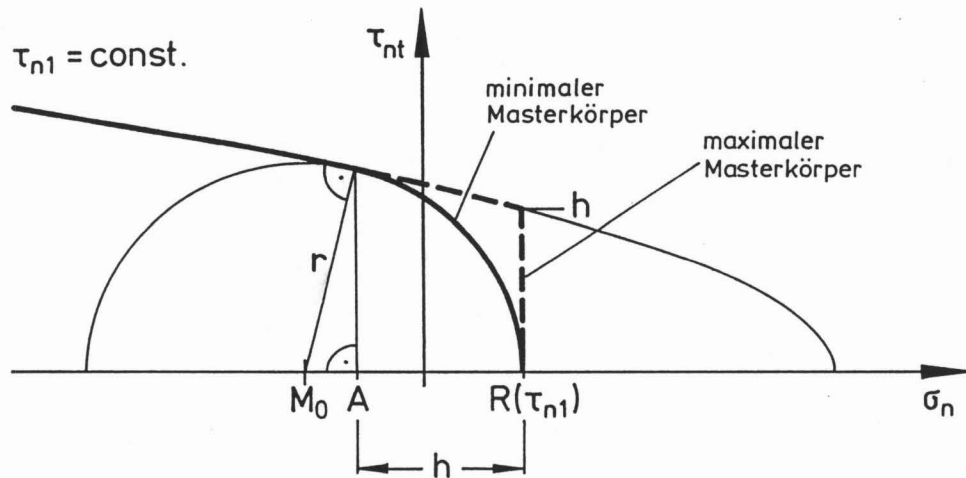


Bild 3/16: Schnitt $\tau_{n1} = \text{const.}$, $\tau_{nt} \geq 0$ des minimalen und des maximalen Masterkörpers für $|\tau_{n1}| < R_{\perp||}$.

ebenso (3.47):

$$H(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) := \sqrt{(1 - p^z)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp||}} \right)^2} + p^z \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} = 1. \quad (3.58)$$

Damit lautet die Definitionsgleichung des maximalen Masterkörpers

$$F^{(+)}(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) := \max \{ F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}), H(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) \} = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (3.59)$$

$$F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (3.60)$$

Numerische Beispiele. In den Tabellen 3/1a - 3/1c sind für drei Spannungszustände Reservefaktor, Bruchwinkel und Bruchebenenspannungen bezüglich der minimalen und maximalen Masterfläche angegeben sowie bezüglich des entsprechenden einfachen parabolischen Ansatzes (3.2), (3.3). Hieraus ist zu erkennen, wie der Bruchwinkel "springen" kann, während sich der Reservefaktor robust verhält (vgl. Abschnitt 4.4). Den Berechnungen liegen die Standardwerte $R_{\perp}^z = 60 \text{ MPa}$, $R_{\perp}^d = 180 \text{ MPa}$, $R_{\perp||} = 80 \text{ MPa}$ und die Steigung $m_{\perp||}^{z,d} = -0,1$ zugrunde.

Tabelle 3/1a: Reservefaktor, Bruchwinkel und Bruchebenenspannungen

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}) = (0, -44, 0, -78, 22, 0) \text{ [MPa]}$					
	f_{Res}	θ_B	$\sigma_n(\theta_B)$	$\tau_{nt}(\theta_B)$	$\tau_{n1}(\theta_B)$
Minimaler Masterkörper	0,984	$-70,5^\circ$	44,26	46,66	-20,73
Einfacher parab. Ansatz	0,989	$-54,9^\circ$	58,83	5,86	-18,01
Maximaler Masterkörper	1,010	$-53,3^\circ$	59,03	1,25	-17,64

Tabelle 3/1b: Reservefaktor, Bruchwinkel und Bruchebenenspannungen

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}) = (0, -37, 0, -64, 47, 0)$ [MPa]					
	f_{Res}	θ_B	$\sigma_n(\theta_B)$	$\tau_{nt}(\theta_B)$	$\tau_{n1}(\theta_B)$
Minimaler Masterkörper	1,008	$-84,3^\circ$	12,35	59,05	-46,77
Einfacher parab. Ansatz	1,014	$86,0^\circ$	-9,07	65,95	46,89
Maximaler Masterkörper	1,014	$86,0^\circ$	-9,07	65,95	46,89

Tabelle 3/1c: Reservefaktor, Bruchwinkel und Bruchebenenspannungen

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}) = (0, 16, 0, 28, 0, 65)$ [MPa]					
	f_{Res}	θ_B	$\sigma_n(\theta_B)$	$\tau_{nt}(\theta_B)$	$\tau_{n1}(\theta_B)$
Minimaler Masterkörper	1,022	$15,8^\circ$	29,49	19,64	62,53
Einfacher parab. Ansatz	1,028	$17,2^\circ$	30,45	18,55	62,08
Maximaler Masterkörper	1,050	$23,6^\circ$	33,99	13,15	59,58

3.3.2 Eingrenzung des realen Bruchwinkels

Sind minimaler und maximaler Masterkörper festgelegt, so kann der *reale* Bruchwinkel eines gegebenen Spannungszustandes $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$ wie folgt eingegrenzt werden. Man bestimmt zunächst den *rechnerischen* Bruchwinkel θ_B und den Reservefaktor $f_{Res}(\sigma)$ bezüglich der maximalen Masterfläche. Die durch den Spannungszustand $f_{Res}(\sigma) \cdot \sigma$ erzeugte Spannungskurve Γ im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum (vgl. (2.30)),

$$\Gamma : \theta \rightarrow (f_{Res}(\sigma)\sigma_n(\theta), f_{Res}(\sigma)\tau_{nt}(\theta), f_{Res}(\sigma)\tau_{n1}(\theta)) \quad , \quad -90^\circ < \theta \leq 90^\circ ,$$

berührt dann für $\theta = \theta_B$ die maximale Masterfläche. Nach obigen Überlegungen kommen nun als reale Bruchwinkel alle diejenigen Winkel in Frage, für die Γ außerhalb des minimalen Masterkörpers verläuft bzw. die minimale Masterfläche durchstößt. Mit anderen Worten: Ist $F_{min}(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ eine den minimalen Masterkörper charakterisierende Funktion, so sind alle Winkel θ , $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$, mit

$$F_{min}(f_{Res}(\sigma)\sigma_n(\theta), f_{Res}(\sigma)\tau_{nt}(\theta), f_{Res}(\sigma)\tau_{n1}(\theta)) \geq 1$$

mögliche reale Bruchwinkel.

$$\left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z}\right)^2 + \left[\left(\frac{|\tau_{nt}|}{R_{\perp\perp}^M \sqrt{1 - 2p_{\perp\perp}^z \sigma_n / R_{\perp}^z}} \right)^\alpha + \left(\frac{|\tau_{n1}|}{R_{\perp\parallel} \sqrt{1 - 2p_{\perp\parallel}^z \sigma_n / R_{\perp}^z}} \right)^\alpha \right]^{2/\alpha} = 1$$

für $\sigma_n \geq 0$, (3.61)

$$\left(\frac{|\tau_{nt}|}{R_{\perp\perp}^M \sqrt{1 - 2p_{\perp\perp}^d \sigma_n / R_{\perp}^d}} \right)^\alpha + \left(\frac{|\tau_{n1}|}{R_{\perp\parallel} \sqrt{1 - 2p_{\perp\parallel}^d \sigma_n / R_{\perp}^d}} \right)^\alpha = 1$$

für $\sigma_n < 0$. (3.62)

Verallgemeinerung des homogenen einfachen parabolischen Ansatz (3.4), (3.5) führt auf die Bruchbedingung

$$\left[(1 - p^z)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left[\left(\frac{|\tau_{nt}|}{R_{\perp\perp}^M} \right)^\alpha + \left(\frac{|\tau_{n1}|}{R_{\perp\parallel}} \right)^\alpha \right]^{2/\alpha} \right]^{1/2} + p^z \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0 , \quad (3.63)$$

$$\left[(p^d)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} \right)^2 + \left[\left(\frac{|\tau_{nt}|}{R_{\perp\perp}^M} \right)^\alpha + \left(\frac{|\tau_{n1}|}{R_{\perp\parallel}} \right)^\alpha \right]^{2/\alpha} \right]^{1/2} + p^d \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0 . \quad (3.64)$$

Wegen der geforderten Konvexität und Differenzierbarkeit muß $\alpha > 1$ sein. Bezüglich (3.61), (3.62) gilt (3.23) - (3.25), bezüglich (3.63), (3.64) gilt (3.6) - (3.9). Minimale und maximale Masterfläche werden analog wie in Abschnitt 3.3.1 konstruiert.

Der Parameter α bewirkt eine Verschiebung des "Buckels" der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve im Bereich $\sigma_2 < 0$, und zwar verschiebt sich der "Buckel" mit wachsendem α nach links. Bild 3/18 zeigt die von (3.63), (3.64) erzeugte (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für $\alpha = 1,825$, $\alpha = 2$, $\alpha = 2,3$ und $m_{\perp\parallel}^{z,d} = -0,2$.

Anmerkung. Wenn $1 < \alpha < 2$, muß darauf geachtet werden, daß die Bruchbedingung bei der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für $\sigma_2 > 0$ den Bruchwinkel $\theta_B = 0^\circ$ liefert. Andernfalls kann als Alternative die Definitionsgleichung des entsprechenden maximalen Masterkörpers als Bruchbedingung verwendet werden.

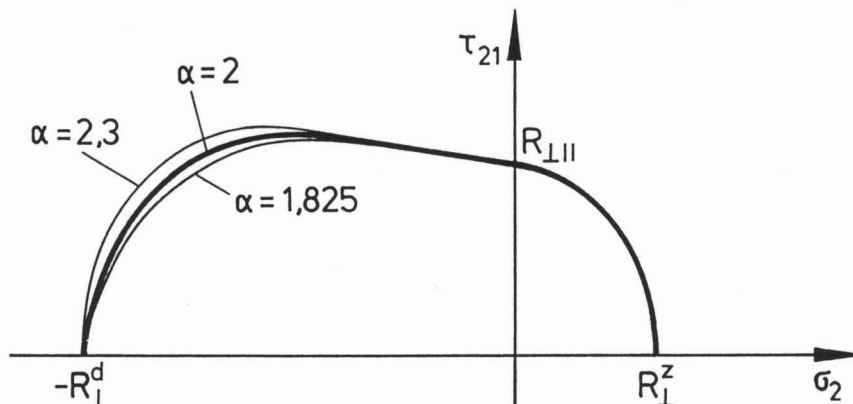


Bild 3/18: Von der Bruchbedingung (3.63), (3.64) erzeugte (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für verschiedene α -Werte.

4 DATENANPASSUNG UND SENSITIVITÄTSANALYSEN [SG, RR]

4.1 Übersicht über die Methoden der Kurvenanpassung

4.1.1 Allgemeines

Die verschiedenen Mohrschen Kriterien für ZFB können in allgemeiner Form durch

$$F(\sigma, \theta, \mathbf{R}) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1 \quad (4.1)$$

ausgedrückt werden. Hierbei ist σ der Vektor der angelegten Spannungen, θ der Winkel der faserparallelen Schnittebene und $\mathbf{R}$ der Vektor der Festigkeitsparameter. Zu jedem Bruchspannungszustand σ gehört ein Bruchwinkel θ_B , für den $F(\sigma, \theta_B, \mathbf{R}) = 1$ gilt. Die Bestimmung von θ_B erfolgt über die Maximierung der Bruchgefahr. Diese ist im allgemeinen iterativ numerisch durchzuführen. Nur in wenigen Fällen kann θ_B in analytisch geschlossener Form angegeben werden (vgl. hierzu Kap. 2).

4.1.2 Theoretische Überlegungen und Qualitätskriterien der Anpassung

Die Festigkeitsparameter des Bruchkriteriums lassen sich nur zum Teil direkt messen. Es ist also ein Ausgleichsverfahren anzuwenden. Die dabei erhaltenen Festigkeitsparameter müssen mit den nach direkten Messungen bestimmten Werten verträglich sein.

In der Theorie der Kurvenanpassung gibt es verschiedene Verfahren und Kriterien, mit denen man eine Anpassung vornehmen und die Güte einer Anpassung beurteilen kann. In der Regel minimiert man den mittleren quadratischen Fehler (oder dessen Wurzel), aber auch das Mittel der absolut genommenen Fehler kann minimiert werden. Bei Testrechnungen wurde festgestellt, daß beide Kriterien zu sehr ähnlichen Ergebnissen führen. Bei größeren Streuungen der Beobachtungswerte ist das Mittlere-Quadratische-Fehler-Kriterium selektiver. Es soll daher generell angewandt werden.

Von wesentlich größerer Bedeutung ist, für welche Größe der Fehler gebildet wird. Dies kann im kartesischen Raum der Spannungen der jeweilige zur Bruchkurve senkrechte Abstand sein. Anstelle des zur Bruchkurve senkrechten Abstandes ist auch der Abstand in der Richtung denkbar, in der die Versuche gefahren wurden. Alternativ kann man diesen Abstand auch im Raum der auf der Bruchkurve wirksamen Spannungen nehmen. Das sind rein geometrisch definierte Größen, die bei der Kurvenanpassung nach Augenmaß natürlich erscheinen. Geometrisch definierte Abweichungen müssen jedoch nicht die zweckmäßigsten sein, da eine bestimmte Abweichung in einem bestimmten Spannungsquadranten bezüglich der *physikalischen* Bruchgefahr ganz andere Auswirkungen haben kann wie in einem anderen Spannungsquadranten. Ein geometrisch bestimmter Fehler würde im Zugbereich genauso bewertet wie im Druckbereich.

Auf die Empfindlichkeit gegenüber der phys. Bruchgefahr nimmt jedoch der Wert der *Zustandsfunktion*, $g(\sigma, \mathbf{R}) = 1 - F(\sigma, \theta_B, \mathbf{R})$ mit $F(\sigma, \theta, \mathbf{R})$ nach Tabelle 4/1. (4.2)

wie sie auch in der Zuverlässigkeitsanalyse benutzt wird, direkt Rücksicht (f_{Res} weggelassen). Die Funktion g ist positiv für sichere Zustände, gleich Null für den Bruchgrenzzustand und negativ für

den Versagenszustand. Sie fällt in den verschiedenen Beanspruchungsbereichen unterschiedlich steil vom sicheren Bereich in den unsicheren Bereich ab. Abweichungen der Versuchspunkte von der Ausgleichsfläche werden daher in den verschiedenen Beanspruchungsbereichen unterschiedlich gewichtet. Wie stark gewichtet wird, kann gesteuert werden. Es ist z.B. möglich, anstelle der ursprünglichen Funktion $F(\sigma, \theta, \mathbf{R})$ die Funktion $F(\sigma, \theta, \mathbf{R})^n$ zu nehmen. Für $n > 1$ werden Abweichungen sehr stark gewichtet. Nach Abschnitt 2.2.2 sollte man von der Anstrengung $A(\sigma, \mathbf{R}) := 1/f_{Res}$ ausgehen und in der Objektfunktion zur Berechnung des mittleren quadratischen Fehlers anstatt der Zustandsfunktion den Ausdruck $\{1 - A(\sigma, \mathbf{R})\}$ verwenden. Bei den homogenen Kriterien #1, #2 und #3 ist $A(\sigma, \mathbf{R}) = F(\sigma, \theta_B, \mathbf{R})$. Testrechnungen an verschiedenen Datensätzen haben ergeben, daß man bei der Datenanpassung für die beiden vorgenannten Vorgehensweisen nahezu die gleichen Ergebnisse erhält. Für die folgenden Auswertungen wird daher durchwegs von Gl.(4.2) ausgegangen.

Für die Bestimmung der Parameter aus streuenden Versuchen gibt es grundsätzlich drei Verfahren.

4.1.3 Verfahren nach dem Prinzip vom Minimum der Abweichungsquadrate.

Diese Verfahren liefern bei gegebener funktionaler Form des Bruchkriteriums und Erfolg der Minimumsuche den unbekannten Parametervektor $\hat{\mathbf{R}}$. $\hat{\mathbf{R}}$ wird nach folgender Vorschrift ermittelt:

$$\hat{\mathbf{R}} = \min \left\{ \sum_{i,j} g(\sigma^{i,j}, \mathbf{R})^2 \right\} . \quad (4.3)$$

Hierbei läuft i über die "Versuchsstrahlen" und j über die Versuche entlang eines "Versuchsstrahls". Das (quadratische) Residuum ist

$$s_R^2 = \frac{1}{N} \sum_{i,j} g(\sigma^{i,j}, \mathbf{R})^2 . \quad (4.4a)$$

Daraus ermittelt sich das (einfache) Residuum

$$s_R = \sqrt{s_R^2} \quad (4.4b)$$

mit N als Gesamtzahl aller verwendeten Versuche. Der "Verlust" an Freiheitsgraden q (= Dimension des Vektors $\mathbf{R}$) kann näherungsweise durch Ersatz von N durch $N-q$ berücksichtigt werden. Das Verfahren vom Minimum der Abweichungsquadrate ist verteilungsfrei. Der kleinste Wert von s_R^2 ergibt sich für das Bruchkriterium, welches die beste Kurvenanpassung ermöglicht. Es ist jedoch kaum möglich das Residuum in seine Streuungsanteile zu zerlegen, da sich das Residuum aus den physikalischen Streuungen der Festigkeitsparameter, den Meßfehlern und dem Gleichungsfehler zusammensetzt. Zwischen den Streuungen der Festigkeitsparameter und den Meßfehlern kann im vorliegenden Fall ebenfalls nicht unterschieden werden, da es nicht gelingt, exakt gleiche Probekörper herzustellen. Allerdings sollte eine Analyse der Einzelwerte der Abweichungen für jeden Versuchsstrahl eine symmetrische, der Normalverteilung ähnliche Verteilung ergeben. Wenn dies nicht der Fall ist, gibt es systematische Gleichungsfehler.

4.1.4 Indirekte Schätzverfahren

Für diese Verfahren muß zunächst ein neuer Datensatz für den unbekannten Festigkeitsparametervektor erstellt werden. Jeweils q Versuche werden verwendet, um aus $g(\sigma^{ij}, \mathbf{R}) = 0$ eine Realisation der q Elemente des Parametervektors zu bestimmen. In jedem Versuch ist die Bestimmung des Bruchwinkels zu wiederholen. Kein Versuch darf hierbei zwei- oder mehrfach verwendet werden. Jede Realisation erfordert jeweils die Lösung eines Systems von q nichtlinearen Gleichungen. Insgesamt entstehen dadurch rund $k \cong N/q$ Realisationen $R_1, R_2, \dots, R_k$ des Parametervektors. Aus physikalischen Gründen kann nicht jeder Versuch zur Bestimmung eines jeden Elementes des Parametervektors verwendet werden. Die Lösungen des Gleichungssystems sind nicht immer eindeutig und daher ist einiger Aufwand notwendig, um richtige Schätzungen der Realisationen des Parametervektors zu erhalten. Für die so berechnete Stichprobe des Parametervektors kann eines der bekannten klassischen Schätzverfahren angewandt werden.

Momentenverfahren

Mit gängigen statistischen Auswerteverfahren können die ersten 4 statistischen Momente einschließlich der dazugehörigen Standardfehler bestimmt werden. Die jeweiligen Mittelwerte sind die besten Schätzwerte für den Parametervektor. Das Verhalten der dritten und vierten Momente kann ersten Aufschluß über die Form der Verteilungen der Elemente des Parametervektors geben (rechtsschief, linksschief, großer/kleiner Exzeß). Desweiteren kann die Korrelationskoeffizientenmatrix einschließlich Standardfehler bestimmt werden. Wenn die Verteilungen für die Komponenten des Parametervektors nicht zu stark von der Normalverteilung abweichen, ist die Korrelationskoeffizientenmatrix auch ein gutes Maß für die gegenseitige stochastische Abhängigkeit. Die Analyse dieser Abhängigkeiten ist für spätere Zuverlässigkeitsberechnungen wichtig. Aus ihnen könnten sich auch Vereinfachungen im Auswerteverfahren ergeben. Momentenverfahren sind ebenfalls verteilungsfrei aber statistisch wenig effizient.

Von hier ausgehend könnte dann versucht werden Verteilungsannahmen einzuführen. Hierzu eignet sich eine gemeinsame Hermite-Verteilung, die mit Momenten bis zur 4.ten Ordnung auskommt, sehr gut. Sie erfaßt die Verhältnisse gut bei kleinen Abweichungen von der Normalverteilung. Abhängigkeiten können durch die Korrelationskoeffizienten näherungsweise beschrieben werden. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die Stichprobengröße der vorliegenden Daten zu klein ist, um zuverlässige Schätzungen des dritten und vierten Momentes auszuführen. Das Momentenverfahren wurde daher nur begleitend verwendet. Die Ergebnisse stimmen im Großen und Ganzen mit den Ergebnissen nach der Methode vom Minimum der quadratischen Abweichungen überein.

Maximum-Likelihood-Verfahren

Für M.-L.-Verfahren, die zwar statistisch aus Gründen der Effizienz allen anderen vorzuziehen sind, müssen Verteilungsannahmen gemacht werden. Das ist bei mehrdimensionalen Verteilungen bzw. bei vorgegebenen Randverteilungen problematisch. M.-L.-Verfahren können deshalb nur dann angewandt werden, wenn die zugrundeliegende Information, also die Verteilungsinformation, sta-

tistisch signifikant ist. Andernfalls wird durch diese Verteilungsinformationen mehr Information in die Daten hineinsteckt als in ihnen wirklich vorhanden ist. Das M.L.-Verfahren wurde daher nicht verwendet.

Keines der indirekten Schätzverfahren kann über die Güte der Anpassung des Modells an die Daten Auskunft geben. Sie sind also nur für die weitere statistische Analyse des Festigkeitsparametervektors $\mathbf{R}$ geeignet, allerdings unter Verlust eines erheblichen Teils der "Freiheitsgrade".

4.2 Vorstellung der für die Datenanpassung verwendeten Modelle

Von den in Abschnitt 2.4, 3.2 und 3.4 diskutierten Modellen werden die in den Tabellen 4/1 und 4/2 dargestellten Bruchkriterien untersucht. Die Modelle werden der Einfachheit halber durchnummeriert.

Nummer	Kapitel 2, 3	freie Parameter	Bemerkungen
Modell #1	wie Modell #2	4 Parameter	vereinfachtes Modell #2, $m^d_{\dots} = m^z_{\dots}$
Modell #2	Gl. (3.2 - 3.12)	5 Parameter	parabolisches Modell
Modell #3	Gl. (3.63 - 3.64)	6 Parameter	α -Modell auf Basis #2 (α ist 6. Param.)
Modell #4	Gl. (2.37 - 2.39)	5 Parameter	Erweitertes Ausgangsmodell
Modell #5	Gl. (3.21 - 3.25)	5 Parameter	allgemeines parab. Modell, $m^d_{\dots} = m^z_{\dots}$
Modell #6	wie Modell #4	4 Parameter	vereinfachtes Modell #4: $\mu_{\perp\perp} = \mu_{\perp\perp}$
Modell #7	wie Modell #5	4 Parameter	vereinfachtes Modell #5, alle m 's gleich

Einschränkungen für die Modellparameter (siehe auch Tabelle 4/2)

Bei der Bestimmung der Festigkeitsparameter (Festigkeitswerte R und Steigungsparameter m) müssen folgende Bedingungen eingehalten werden (siehe auch Kapitel 3):

- (1) Es muß immer gelten: $R_{\perp\perp}^M > R_{\perp}^z$.
- (2) Die Anforderung A VIII (Kapitel 3) muß für alle Modelle erfüllt sein. (Der Krümmungsradius im Scheitel $(\sigma_n, \tau_{nt}) = (R_{\perp}^z, 0)$ muß größer als $R_{\perp}^z$ sein.)
 - (2.1) Für die homogenen Modelle #1, #2, #3 ist A VIII für $p^z < 1 - (R_{\perp}^z/R_{\perp\perp}^M)^2$ erfüllt.
 - (2.2) Für die inhomogenen Modellen #4 & #6 ist A VIII für $\mu_{\perp\perp} (\equiv \mu_{nt}) < (R_{\perp\perp}^M/R_{\perp}^z) - 1$ erfüllt.
 - (2.3) Für die inhomogenen Modellen #5 & #7 ist A VIII für $2 p_{\perp\perp}^z < 1 - (R_{\perp}^z/R_{\perp\perp}^M)^2$ erfüllt.

Aus diesen Einschränkungen des Gültigkeitsbereiches lassen sich auch leicht Grenzen für die Steigungen $m_{\dots}$ an den Achsenabschnitten herleiten.

Tabelle 4/1: Zusammenstellung der zur Datenanpassung verwendeten Modelle für die Bruchbedingungen

Modell (1), Parameter	$\sigma_n \geq 0$	$\sigma_n < 0$
#1 $R_{\perp}^z, R_{\parallel}, R_{\perp}^d, p^d$ $p^z = f(p^d)$	$\sqrt{(1-p^z)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp}^M}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\parallel}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + p^z \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} = 1$	$\sqrt{(p^d)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp}^M}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\parallel}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + p^d \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} = 1$
#2 $R_{\perp}^z, R_{\parallel}, R_{\perp}^d, p^d, p^z$	Wie Modell #1, aber sowohl p^d als auch p^z sind freie Parameter	
#3 $R_{\perp}^z, R_{\parallel}, R_{\perp}^d, p^d, p^z, \alpha$	$\sqrt{(1-p^z)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z}\right)^2 + \left[\left(\frac{ \tau_{nt} }{R_{\perp}^M}\right)^{\alpha} + \left(\frac{ \tau_{n\parallel} }{R_{\perp\parallel}}\right)^{\alpha} \right]^{\frac{2}{\alpha}}} + p^z \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} = 1$	$\sqrt{(p^d)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d}\right)^2 + \left[\left(\frac{ \tau_{nt} }{R_{\perp}^M}\right)^{\alpha} + \left(\frac{ \tau_{n\parallel} }{R_{\perp\parallel}}\right)^{\alpha} \right]^{\frac{2}{\alpha}}} + p^d \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d} = 1$
#4 $R_{\perp}^z, R_{\parallel}, R_{\perp}^d, \mu_{\perp\parallel}, \mu_{\perp\perp}$	$\sqrt{\left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M - \mu_{\perp\perp} \sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\parallel}}{R_{\perp\parallel} - \mu_{\perp\parallel} \sigma_n}\right)^2} = 1$	$\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M - \mu_{\perp\perp} \sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\parallel}}{R_{\perp\parallel} - \mu_{\perp\parallel} \sigma_n}\right)^2} = 1$
#5 $R_{\perp}^z, R_{\parallel}, R_{\perp}^d,$ $p_{\parallel\parallel}^d, p_{\perp\perp}^d,$ $p^z = f(p^d)$	$\sqrt{\left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M \sqrt{1-2p_{\perp\perp}^z} \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\parallel}}{R_{\perp\parallel} \sqrt{1-2p_{\perp\parallel}^z} \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z}}\right)^2} = 1$	$\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M \sqrt{1-2p_{\perp\perp}^d} \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\parallel}}{R_{\perp\parallel} \sqrt{1-2p_{\perp\parallel}^d} \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^d}}\right)^2} = 1$
#6≡#4 $R_{\perp}^z, R_{\parallel}, R_{\perp}^d, \mu$	Wie Modell #4, aber $\mu_{\perp\parallel} = \mu_{\perp\perp}$, also alle μ 's gleich, nur 1 freier Parameter μ	
#7≡#5 $R_{\perp}^z, R_{\parallel}, R_{\perp}^d, p$ $p^z = f(p^d)$	Wie Modell #5, aber zusätzlich zu $m^d = m^z$... auch $m_{\perp\parallel} = m_{\perp\perp}$, also alle m 's gleich, nur 1 freier Parameter	

(1) Die Modelle #1, #2 und #3 sind homogen, die Modelle #4 bis #7 inhomogen. Siehe auch die Erläuterungen in den Kapiteln 2 und 3.

Tabelle 4/2: Zusammenstellung der zur Datenanpassung verwendeten Modellparameter $R_{\perp\perp}^M$, Steigungen für $\sigma_2=0$

Modell	$R_{\perp\perp}^M$ (1)	$-m_{\perp\parallel}^d$	$-m_{\perp\parallel}^z$	$-m_{\perp\perp}^d$	$-m_{\perp\perp}^z$
#1 (4 Param.) $m_{\perp\parallel}^d = m_{\perp\parallel}^z$	$\frac{R_{\perp}^d}{1 + \sqrt{2p^d + 1}}$	$p^d \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^d}$ (2)	$p^z \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^z}$ (2,4)	$p^d \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^d}$ (2)	$p^z \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^z}$ (2,4)
#2 (5 Param.)	wie bei Modell #1	wie bei Modell #1 (3)	wie bei Modell #1 (3,4)	wie bei Modell #1 (4)	wie bei Modell #1 (3,4)
#3 (6 Param.)	wie bei Modell #1	wie bei Modell #1 (3)	wie bei Modell #1 (3,4)	wie bei Modell #1 (4)	wie bei Modell #1 (3,4)
#4 (5 Param.)	$\frac{R_{\perp}^d}{2} (\sqrt{1 + \mu_{\perp\perp}^2} - \mu_{\perp\perp})$	$\mu_{\perp\parallel} (\equiv \mu_{n1})$	$\mu_{\perp\parallel} (\equiv \mu_{n1})$	$\mu_{\perp\perp} (\equiv \mu_{nt})$ (4)	$\mu_{\perp\perp} (\equiv \mu_{nt})$ (4)
#5 (5 Param.) $m_{\perp\parallel}^d = m_{\perp\perp}^z$	$\frac{R_{\perp}^d}{1 + \sqrt{2p_{\perp\perp}^d + 1}}$	$p_{\perp\parallel}^d \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^d}$	$p_{\perp\parallel}^z \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^z}$	$p_{\perp\perp}^d \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^d}$	$p_{\perp\perp}^z \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^z}$ (4)
#6 $\equiv$ #4 (4 Param.)	wie bei Modell #4	wie bei Modell #4 mit $\mu_{\perp\parallel} = \mu_{\perp\perp}$, d.h. alle m's gleich (4)			
#7 $\equiv$ #5 (4 Param.)	wie bei Modell #5	wie bei Modell #5 mit $m_{\perp\parallel}^d = m_{\perp\perp}^z$, d.h. alle m's gleich (4)			

(1) Es muß immer gelten: $R_{\perp\perp}^M > R_{\perp}^z$.

(2) p^d und p^z sind wegen Gleichsetzen der Steigungen ($m_{\perp\parallel}^d = m_{\perp\parallel}^z$) funktional abhängig; nur ein zusätzlicher freier Parameter.

(3) p^d und p^z sind hier unabhängig; es tritt ein Knick auf der τ_{21} -Achse ($\sigma_2 = 0$) auf. Die Bruchkurve ist dort stetig, aber nicht differenzierbar.

(4) Für die Steigungsparameter $-m_{\perp\parallel}^z$ und $-m_{\perp\perp}^z$ sind die oben genannten Einschränkungen einzuhalten.

4.3 Vergleich und Bewertung der Modelle anhand der vorhandenen Daten

4.3.1 Verwendete Daten

Für die Datenanpassung zur Abschätzung der Festigkeitsparameter in den vorgestellten Modellen konnten nur Versuchsreihen mit ausreichend großer Stichprobengröße (N) verwendet werden.

Daten aus den Versuchsreihen des Projektes:

A1 Z/D-T Rohrprobekörper, GFK: E-Glas/EP-Harz Araldit, LY556/HY917/DY070 F, N=140

A2 Z/D-T Rohrprobekörper, GFK: E-Glas/EP-Harz Araldit, LY556/HT976, N=61

A3 Z/D-T Rohrprobekörper, CFK: T300/Harz wie A2, N=72

Daten aus der Literatur:

B Schürmann Versuche (1983), GFK, E-Glas Cosmostrand 859RS, EP-Harz Araldit, LY556/HY917/DY070, N=79

C Knappe/Schneider Versuche (1972), GFK, Roving ES9-36x21-K43, Araldit E (CY232) / Härter 951, nur Mittelwerte aus jeweils 5 Versuchen, $N=5 \times 14$

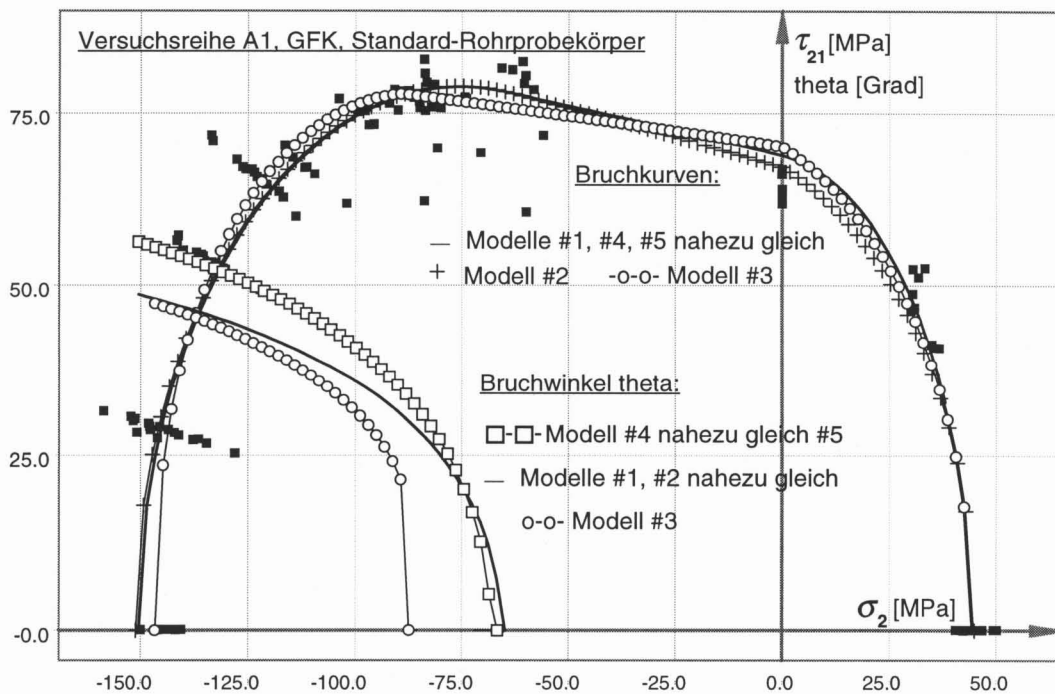
Die Daten von Franke/Herrmann (1982, GFK, N=10), Swanson/Messick/Tian (1987, GFK, N=17) und von MBB/VFW-Fokker (1982, CFK, N=7) wurden nicht verwendet, da die Stichprobengröße zu klein war, bzw. Größe und Form der Probekörper nicht eindeutig ermittelt werden konnte.

4.3.2 Rechnerische Auswertung

Die *Bilder 4/1a,b* und *4/2* bis *4/5* stellen die Daten zusammen mit allen Modellen (#1, #2, #3, #4, #5, #6, #7) dar. Im *Anhang III* sind die wichtigsten Ergebnisse für jede der untersuchten Versuchsreihen tabellarisch zusammengefasst.

Bild 4/6 zeigt, daß das für die Praxis empfohlene Verfahren, die Mittelwerte der Basis-Festigkeitswerte vorab zu bestimmen, in guter Näherung die gleichen Resultate bringt.

Der Wert des (mittleren) Residuums ist für alle Modelle und jeden Datensatz nahezu gleich. Das Modell #1 ist einfach, numerisch stabil und läßt sich den Daten gut anpassen. Die Modelle #2 und #3 liefern eine gleich gute oder bessere Anpassung, sind aber aus numerischen Gründen für Zuverlässigkeitsrechnungen nicht optimal, da beide in $\sigma_2 = 0$ nicht differenzierbar sind. Die Daten werden durch die Modelle #4 / #6 und #5 / #7 ebenfalls gut angepaßt, obwohl alle Achsenabschnitte (R-Werte) etwas überschätzt werden. Bei den Modellen #5 / #7 muß man etliche Einschränkungen des Gültigkeitsbereiches beachten, damit die Terme unter der Wurzel im Nenner nicht negativ werden können. Dies kann bei Zuverlässigkeitsrechnungen problematisch werden. Die mittleren Residuen für die Daten von Knappe/Schneider und Schürmann sind mit den Residuen der eigenen Daten vergleichbar. Desweiteren vergleiche man die Anmerkungen unter den *Tabellen im Anhang III*.



*Bild 4/1a: Vergleich der Modelle #1, #2, #3, #4 und #5
($\theta = \theta_B$)*

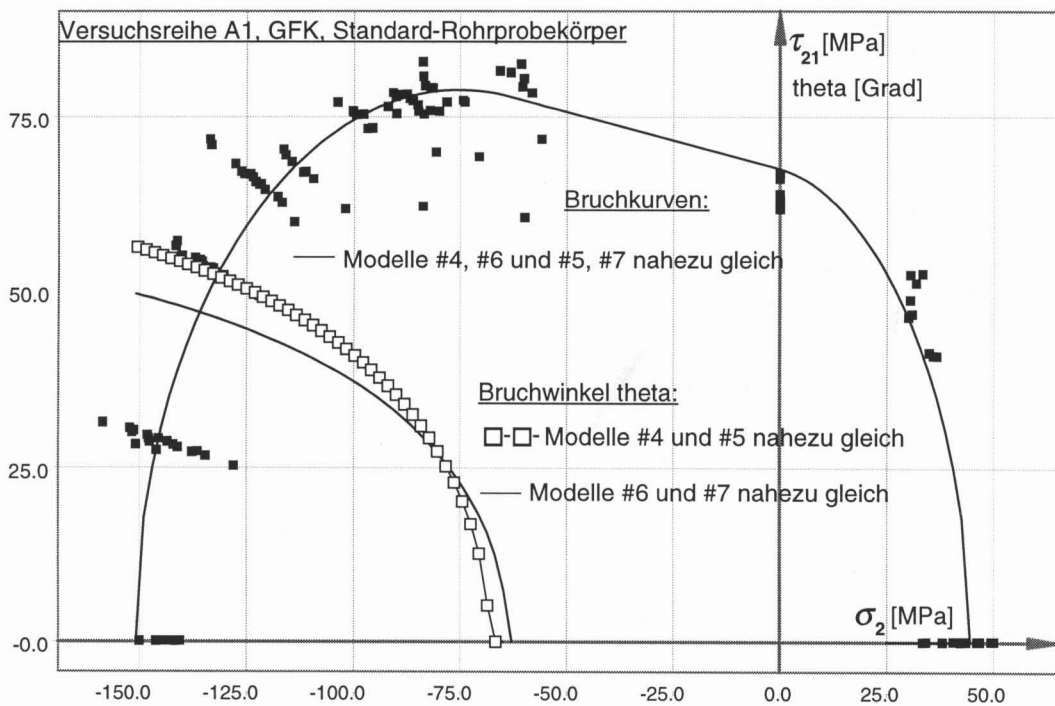
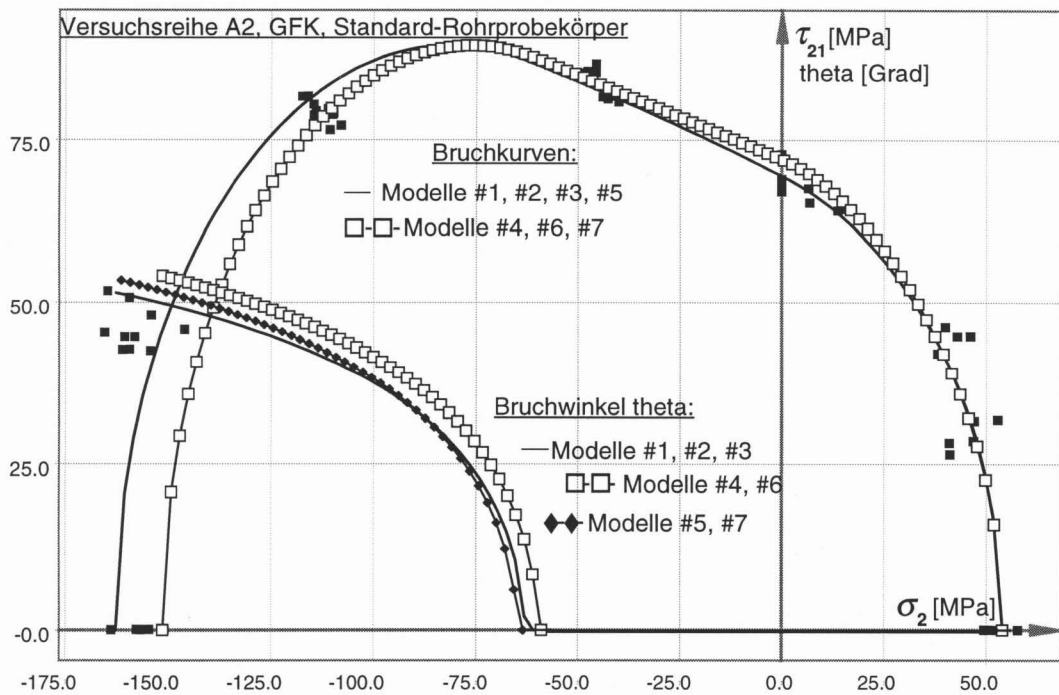


Bild 4/1b: Vergleich der Modelle #4 und #5 mit den Modellen #6 und #7



*Bild 4/2: Vergleich aller Modelle (#1, #2, #3, #4, #5, #6, #7).
(theta = θ_B)*

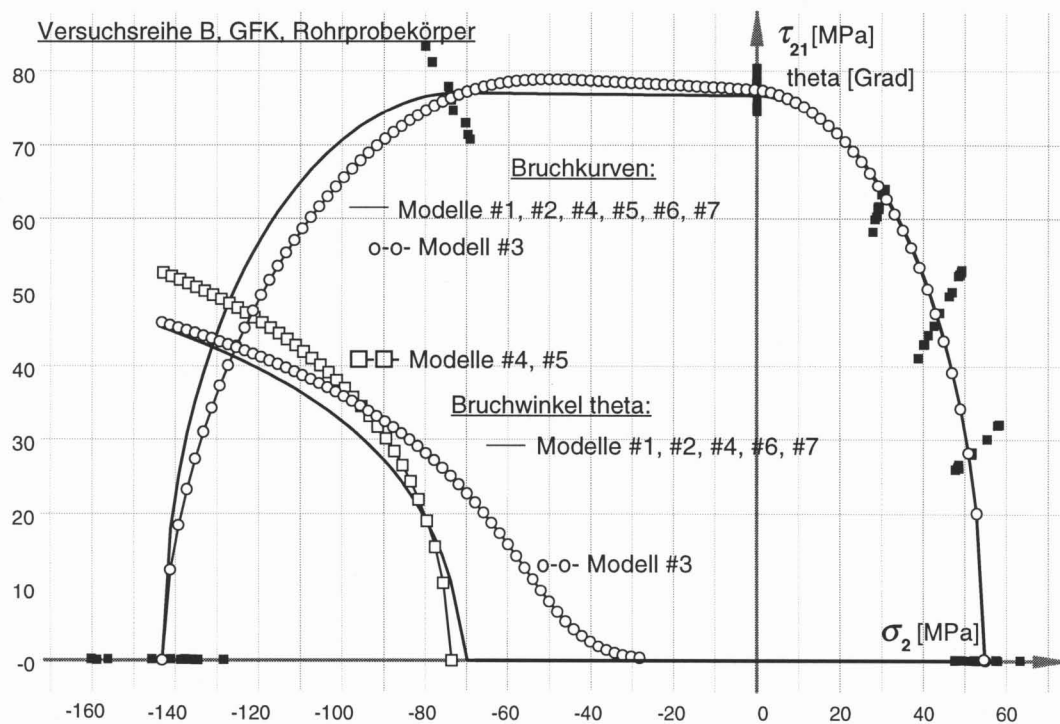


Bild 4/3: Vergleich aller Modelle (#1, #2, #3, #4, #5, #6, #7)

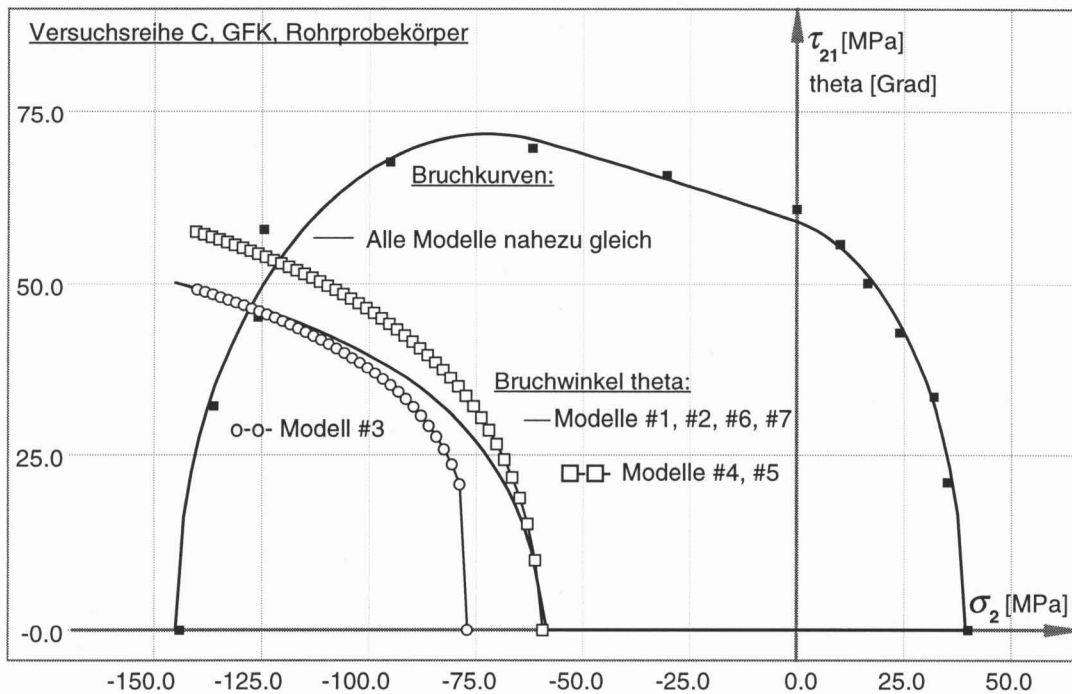


Bild 4/4: Vergleich aller Modelle (#1, #2, #3, #4, #5, #6, #7)
($\theta = \theta_B$)

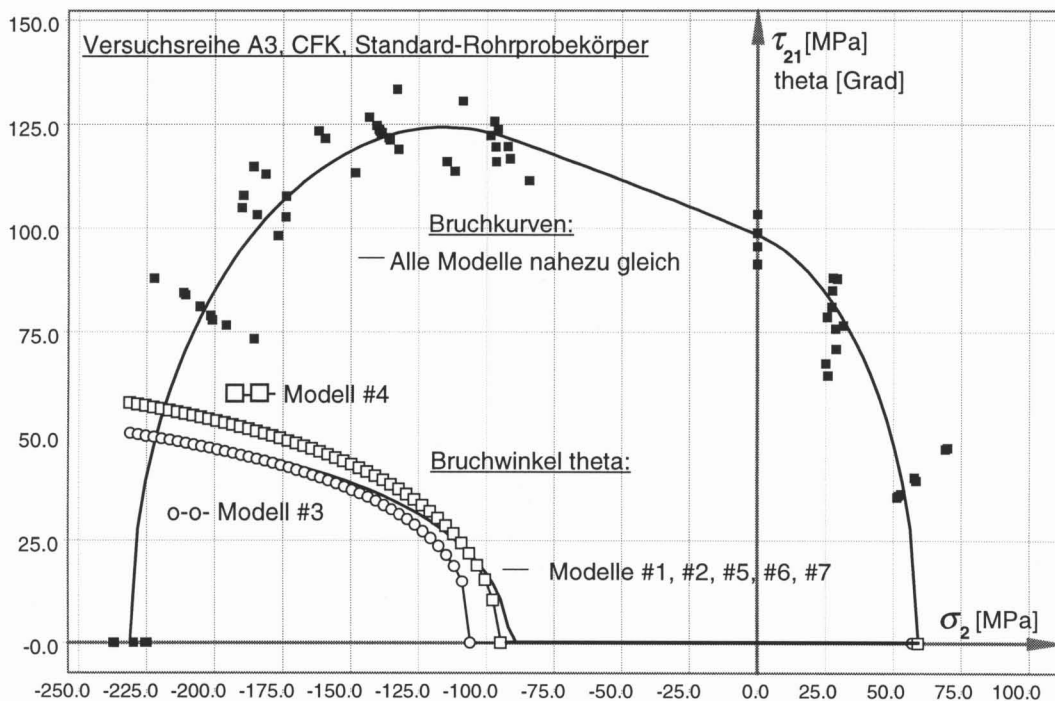


Bild 4/5: Vergleich aller Modelle (#1, #2, #3, #4, #5, #6, #7)

Bei allen Modellen wird die Zugfestigkeit (ca. 60 MPa) bei den CFK-Versuchen gegenüber dem Mittelwert (51 MPa) etwas überschätzt, um die Daten im Bereich $\sigma_2 \geq 0$ gut anzupassen.

Für die Praxis empfohlenes Verfahren

Beim Nachweis eines Bauteiles liegen in der Regel Dimensionierungswerte R für die Basis-Festigkeiten vor, die auf gemessenen Mittelwerten basieren. Für die Praxis empfiehlt sich deshalb, nur den (oder die) Steigungsparameter aus der Datenanpassung zu schätzen und die Basis-Festigkeitswerte gleich den Mittelwerten $\bar{R}$ festzusetzen.

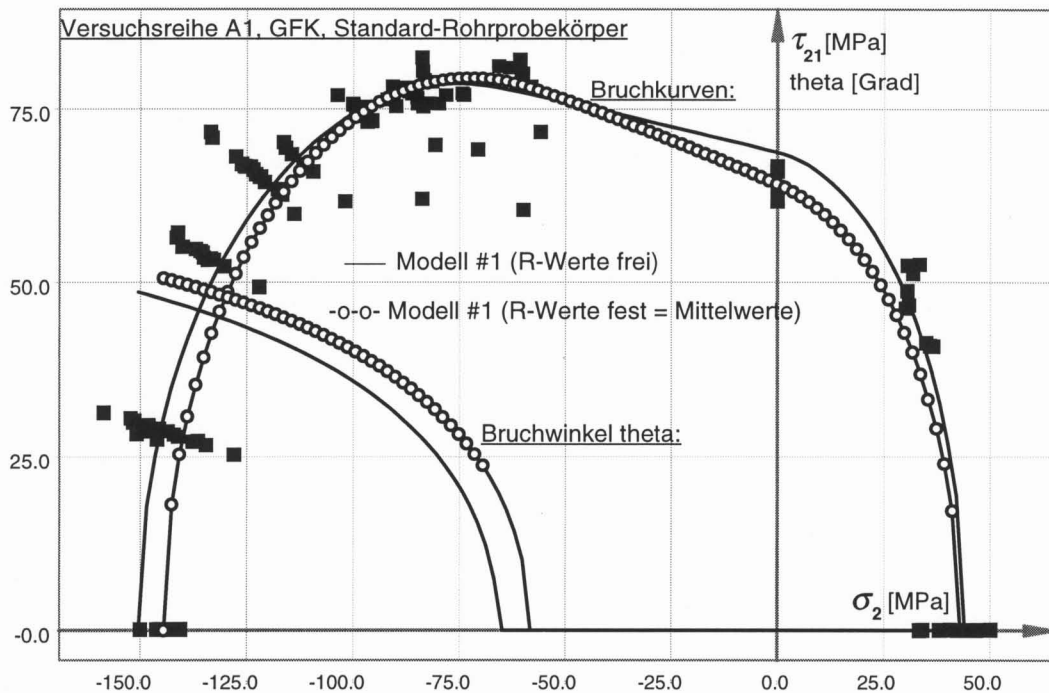


Bild 4/6: Modell #1 mit den Basis-Festigkeiten als a) freie Parameter und b) Mittelwerte festgesetzt

Bei der Versuchsreihe A1 und auch bei A3 (CFK) ergeben sich nur kleine Unterschiede, wenn man die (vorab bestimmten) Mittelwerte der Basis-Festigkeitswerte verwendet und nur den Steigungsparameter schätzt.

Ganz ähnliche Bilder lassen sich mit dem gleichen Datensatz auch mit den Modellen #4 bzw. #6 erzeugen.

4.4 Sensitivitätsanalyse der Steigungsparameter der ausgewählten Modelle (Basis-Festigkeitswerte als Parameter festgelegt)

Für das bevorzugte Modell #1 (siehe Abschnitt 4.5) soll die Sensitivität auf Änderungen des die Steigungen für $\sigma_2 = 0$ bestimmenden Parameters p^d untersucht werden. Der andere Parameter p^z ist in diesem Modell funktional abhängig (siehe auch *Tabelle 4/2*):

$$\frac{p^z}{R_{\perp}^z} = \frac{p^d}{R_{\perp}^d}; \quad p^z = p^d \frac{R_{\perp}^z}{R_{\perp}^d} \quad (4.5)$$

Es genügt also, nur p^d zu variieren. Die Basis-Festigkeitswerte $R_{\perp}^z$, $R_{\parallel}$ und $R_{\perp}^d$ in den *Bildern 4/7 bis 4/11* sind die Mittelwerte aus der Versuchsreihe A1.

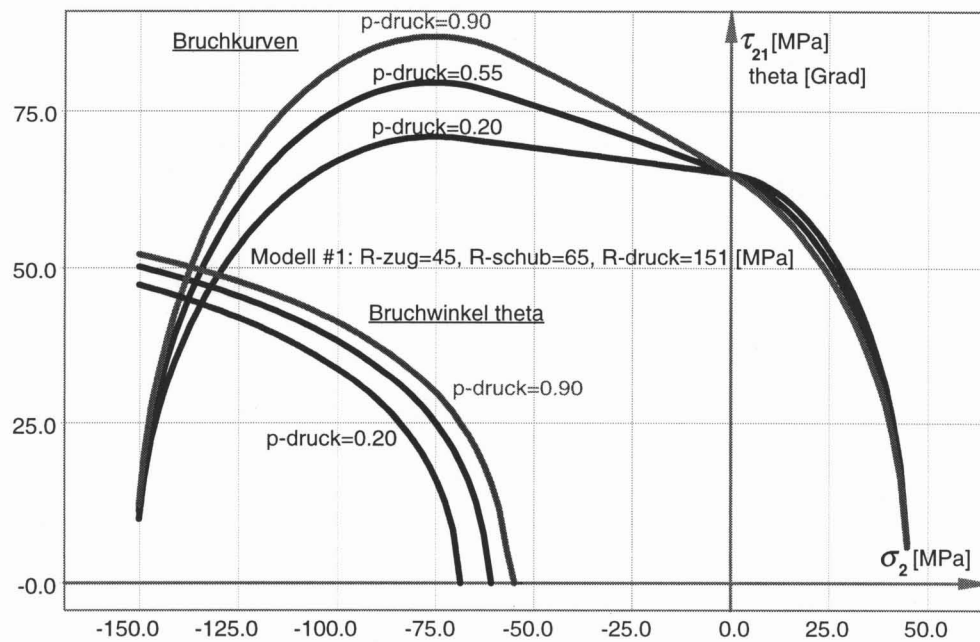


Bild 4/7: Variation von p^d im Modell #1: (σ_2, τ_{21}) -Ebene

$(R\text{-zug} = \bar{R}_{\perp}^z = 45; R\text{-druck} = \bar{R}_{\perp}^d = 151; R\text{-schub} = \bar{R}_{\perp\parallel} = 65 \text{ MPa}; p\text{-druck} = p^d); \theta = \theta_B$

- Die Datenauswertungen in Abschnitt 4.3 ergaben Werte $0.50 < p^d < 0.75$ für die verschiedenen Versuchsreihen.
- Die Bruchkurve des Modell #1 reagiert nur im Druckspannungsbereich ausgeprägt auf die Parametervariation, während sich der vorausgesagte Bruchwinkel nur unwesentlich ändert.
- Die Modelle #4 bzw. #6 verhalten sich bei Parametervariationen ganz ähnlich. Das Modell #4 mit zwei unabhängigen Parametern ($\mu_{\perp\parallel}$ und $\mu_{\perp\perp}$) reagiert in der (σ_2, τ_{21}) -Ebene praktisch nur auf den ersten Parameter $\mu_{\perp\parallel}$. Ähnliches gilt auch für das Modell #5. Dies erklärt die numerischen Schwierigkeiten und die zum Teil inkonsistenten Resultate der Datenanpassung dieser Modelle, wenn, wie hier, nur Versuchsdaten in der (σ_2, τ_{21}) -Ebene vorliegen.

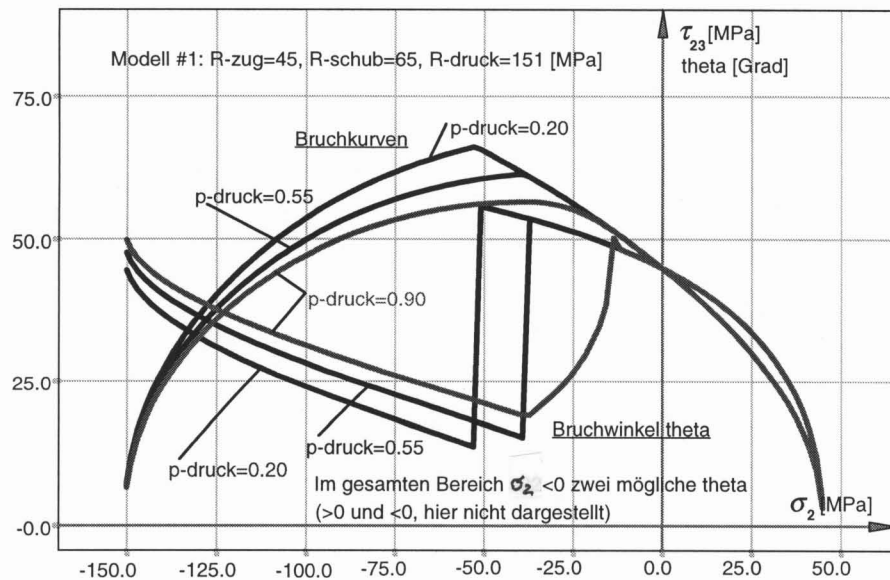


Bild 4/8a: Variation von p^d im Modell #1: (σ_2, τ_{23}) -Ebene
 ($R\text{-zug} = R_{\perp}^z$; $R\text{-druck} = R_{\perp}^d$, $R\text{-schub} = R_{\perp}^s$, $p\text{-druck} = p^d$. Im Bereich $\sigma_2 < 0$
 ab Sprungstelle zwei mögliche θ ; hier den positiven bzw. kleineren positiven dargestellt)

- Die Anmerkungen zu Bild 4/7 gelten für die (σ_2, τ_{23}) -Ebene (Bild 4/8a) sinngemäß. Weitere Anmerkungen enthält Abschnitt 2.3. Das Modell #4 reagiert in dieser Ebene natürlich nur auf den zweiten Parameter $\mu_{\perp} (= \mu_{nt})$, da die Bruchbedingung nur für $\tau_{n1}=0$ angewendet wird.
- In der Gegend des Sprunges des Bruchwinkels θ_B kann es mehrere Maxima der Bruchgefahr geben. Dies führt zu (numerisch bedingten) Inkonsistenzen bei der Vorhersage von θ_B in diesem Bereich. Die folgenden Bilder 4/8b, 4/9a, 4/9b zeigen diesen Sachverhalt.
 (Für $p^d = 0.90$ rollt der Mohrsche Kreis längs der Masterkurve ab, d.h., die Hypothese H III von Puck bzw. A IX ist verletzt. A VIII ist allerdings noch nicht verletzt.)

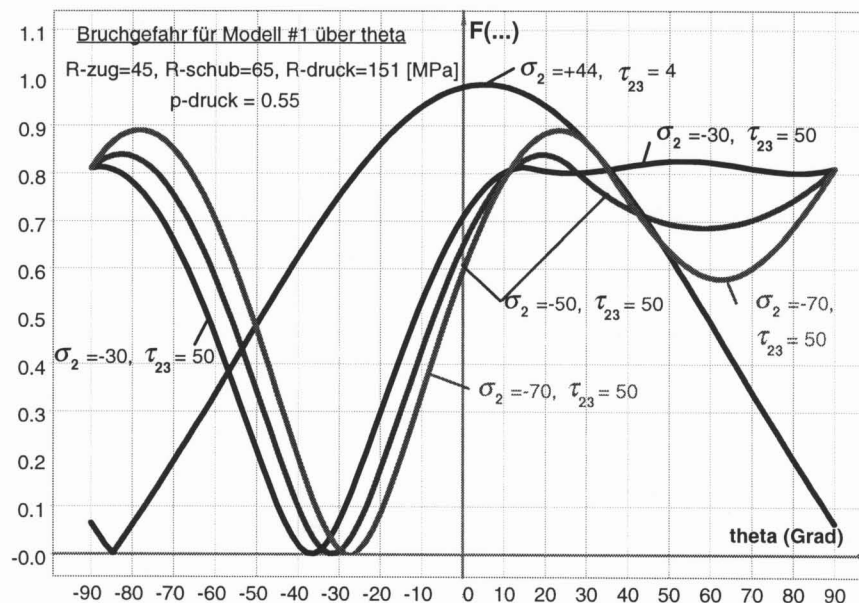


Bild 4/8b: Lokale Maxima im Bereich des Sprunges von θ_B im Modell #1: (σ_2, τ_{23}) -Ebene

Noch deutlicher wird das Problem der nicht immer eindeutigen Vorhersage von θ_B , wenn man aus der (σ_2, τ_{23}) -Ebene herausgeht und z.B. τ_{31} ungleich 0 setzt.

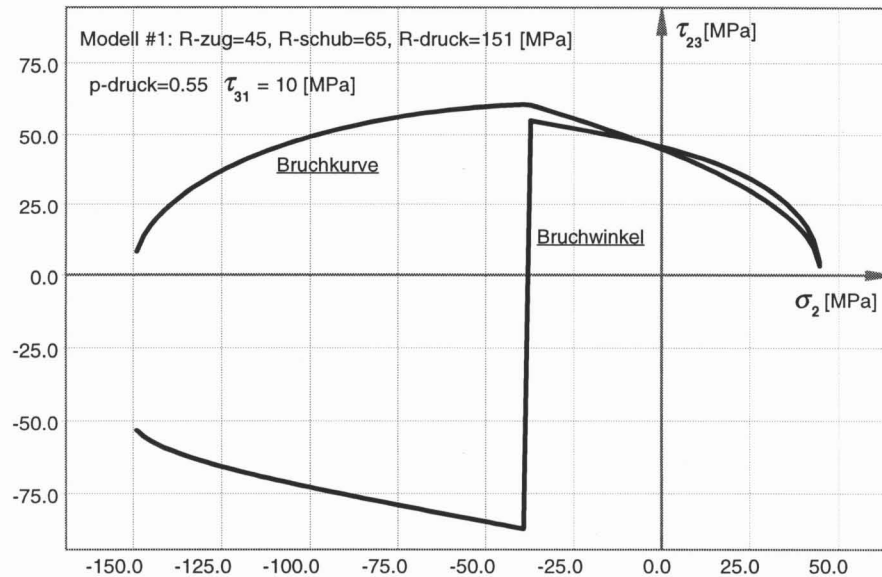


Bild 4/9a: Bruchkurve und Bruchwinkel im Modell #1: (σ_2, τ_{23}) -Ebene, $\tau_{31}=10$ MPa
(R-zug = $R_{\perp}^z$; R-druck = $R_{\perp}^d$, R-schub = $R_{\perp||}$, p-druck = p^d)

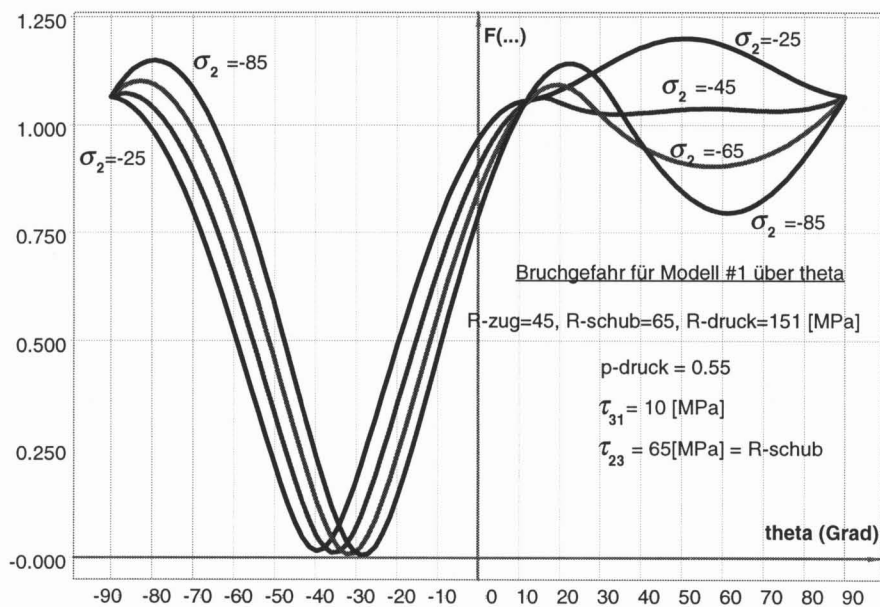


Bild 4/9b: Lokale Maxima im Bereich des Sprunges von θ_B : (σ_2, τ_{23}) -Ebene, $\tau_{31} = 10$ MPa

- Das Bild gilt für Modell #1 in der gleichen Ebene wie Bild 4/9a. τ_{23} ist gleich der Schubfestigkeit gesetzt, $\tau_{31} = 10$ MPa, σ_2 wird variiert. Für $\sigma_2 = -45$ gibt es mindestens 3 lokale Maxima der Bruchgefahr.
- Für die Modelle #4 und #6 tritt der gleiche Effekt auf.
- Bei entsprechender (durchaus realistischer) Wahl der Reibungs- bzw. Steigungsparameter tritt dieser Effekt bei allen Modellen auf, siehe auch Abschnitt 2.3.

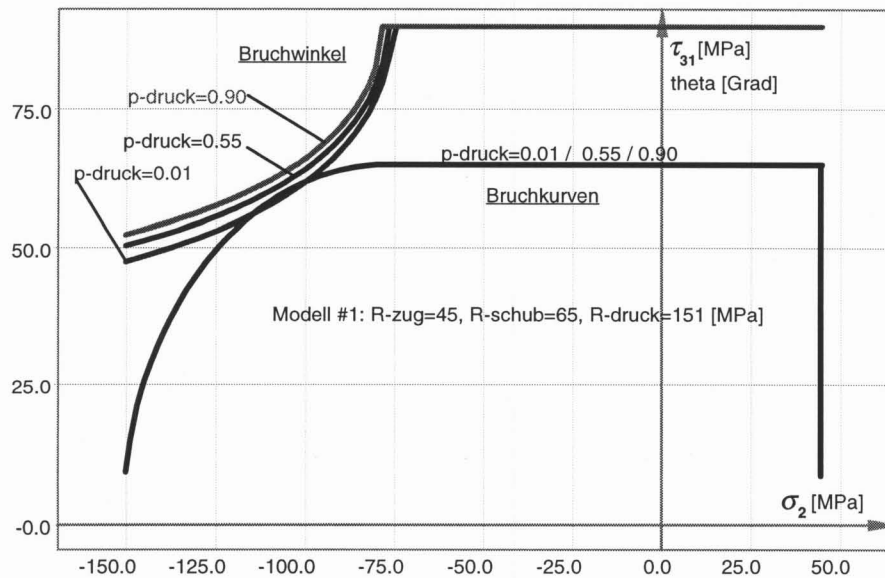
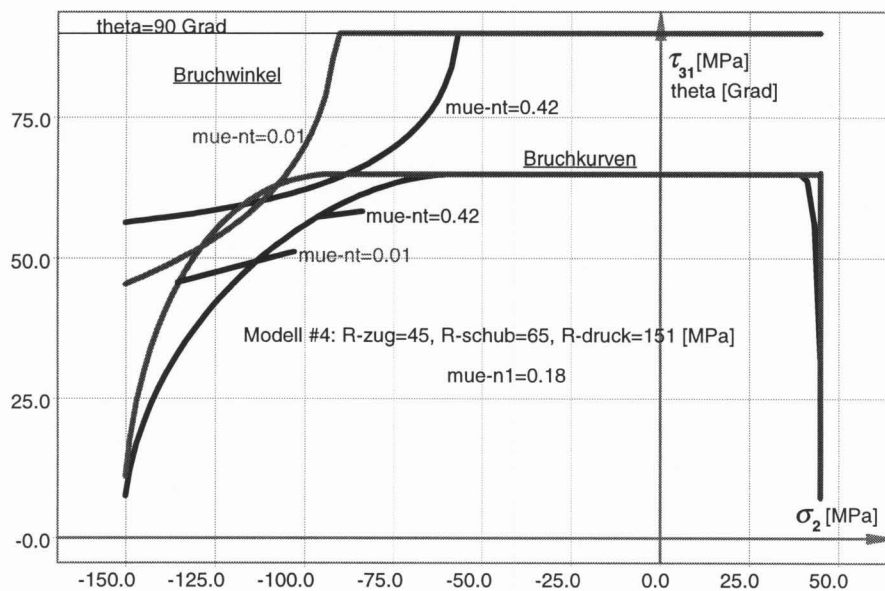


Bild 4/10a: Variation von p^d im Modell #1: (σ_2, τ_{31}) -Ebene



*Bild 4/10b: Variation von $\mu_{\perp} = \mu_{nt}$ im Modell #4: (σ_2, τ_{31}) -Ebene
($\mu_{n1} = \mu_{\perp}$)*

- Modell #1 reagiert nur im Bruchwinkel auf eine Variation des Steigungsparameters p^d .
- Modell #4 reagiert wesentlich ausgeprägter, auch in der Bruchkurve. Die Sensitivität bezüglich $\mu_{\perp} = \mu_{n1}$ ist ähnlich wie für $\mu_{\perp} = \mu_{nt}$.
- Die Sensitivitätsanalysen in der (σ_2, τ_{31}) -Ebene belegen, daß auch Versuche im Druckbereich (σ_2^d) dieser Ebene zum Schätzen des zweiten Steigungsparameters μ_{nt} für Modell #4 geeignet sind.

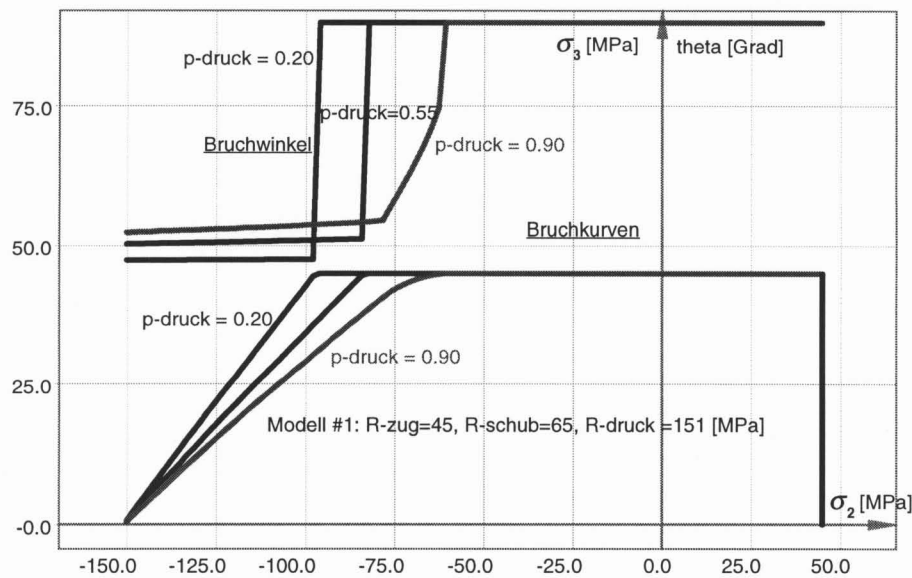


Bild 4/11: Variation von p^d im Modell #1: (σ_2, σ_3) -Ebene

- In *Bild 4/11* reagiert Modell #1 im Bruchwinkel ausgeprägt auf eine Variation des einen Steigungsparameters. (Auch Modell #4 reagiert sehr ähnlich, aber nur auf eine Variation von $\mu_{\perp\perp} = \mu_{nt}$, da die Bruchbedingung nur für $\tau_{n1}=0$ angewendet wird.)
- Siehe zu diesem Bild auch die Ausführungen in Abschnitt 2.3 und das Bild des Bruchkörpers im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum in Farbtafel 3/1, Bild 2.

4.5 Bewertung der Modelle

Die Anpassung der Parameter der sieben ausgewählten Modelle an die verschiedenen Datensätze zeigen im wesentlichen Folgendes. Dabei macht es keinen nennenswerten Unterschied, ob man die Basis-Festigkeitswerte (R-Werte) bei der Datenanpassung zusammen mit den Steigungsparametern als freie Parameter nimmt, oder ob die R-Werte vorab als Mittelwerte geschätzt werden (siehe auch *Bild 4/6*):

- Alle Modelle, die sich aus theoretischer Sicht (auch) nur durch Feinheiten unterscheiden, haben ungefähr gleiches Residuum für jeden der Datensätze. Auch die vorhergesagten Bruchwinkel θ_B^d unterscheiden sich wenig und fallen sämtlich in den Streubereich der Versuche. Aus dieser Sicht verdient also keines der Modelle den Vorzug vor den anderen. Die geringen Unterschiede der Residuen für die verschiedenen Datensätze sind in der Herstellung der Probekörper und der Versuchstechnik begründet.
- Die aus der Mohrschen Hypothese resultierenden Modelle führen zu praktischen und wirklichkeitsnahen Bruchkriterien. Die darauf aufbauende Pucksche Hypothese kann streng weder bestätigt noch verworfen werden, da zusätzliche, zusammen mit diesen (σ_2, τ_{21}) -Daten auswertbare Versuche in der dritten Richtung, d.h. in der (σ_2^d, τ_{23}) - oder (σ_2^d, σ_3^d) -Ebene, fehlen.

- Die Resultate der Zug-/ Schubversuche liegen für Schubspannungen bis etwa $R_{\perp\parallel}/2$ in allen Versuchsreihen nahezu senkrecht über den reinen Zugversuchen (siehe insbesondere *Bild 4/5*). Das, und die relativ großen Streuungen, können darauf hinweisen, daß sich im Bereich $\sigma_2 > 0$ zwei Versagensmoden, Zugbruch und Schubbruch, überlagern.
- Auch im Druckbereich $\sigma_2 < 0$ kann man die Überlagerung von 2 Bruchmoden nicht ausschließen. Darauf können vor allem die lokal größeren Streuungen im Bereich der größten Schubfestigkeiten (Beginn des Abkippen der Bruchebene: $\theta_B \neq 0$) hinweisen, wo entweder der eine oder der andere Schub-Bruchmodus auftritt.
- Die von Schürmann durchgeführten Versuche (Abschnitt 4.3.1) haben nur einen Versuchsstrahl für $\sigma_2 / \tau_{21} = -0,5$. Die 8 Versuche auf diesem Strahl erscheinen im Vergleich zu den anderen GFK-Datensätzen zu niedrig. Die Schubfestigkeit erscheint relativ zu den anderen GFK-Datensätzen vergleichsweise hoch. Da nicht mehr feststellbar ist, ob die Herstellung der Probekörper oder die Ausführung der Versuche merkliche Unterschiede zu den anderen Datensätzen aufweist, soll der Datensatz B nicht für eine allgemeine Bewertung der Modelle herangezogen werden.
- Für eine Bewertung der verschiedenen Modelle sollten daher vornehmlich physikalische Gesichtspunkte maßgebend sein. Damit kann zunächst Modell #2 ausgeschlossen werden, da aus mikromechanischen Überlegungen heraus erwartet werden muß, daß die Bruchkurven für $\sigma_2 = 0$ nicht nur stetig sondern auch differenzierbar sind. Dies gilt auch für Modell #3 mit dem zusätzlichen Parameter α .
- Das Modell #3 kann zwar analog Modell #1 differenzierbar gemacht werden, jedoch ergibt der zusätzliche Aufwand zur Schätzung des Parameters α keine wesentliche Verbesserung der Anpassung. Dieses Modell wird deshalb nicht empfohlen.
- Durch Gleichsetzen aller Steigungen ergeben sich aus den Modellen #4 und #5 die vereinfachten Modelle #6 und #7 mit nur einem Steigungsparameter. Gegenüber Modell #1 haben diese den Nachteil, daß sie inhomogen sind. Die Datenanpassung ist nicht besser als bei Modell #1. Sie werden deshalb nicht empfohlen.
- Das Modell #5 ist dem Modell #4 im Aufbau der Gleichungen und in der Datenanpassung sehr ähnlich. Beide Modelle sind inhomogen und man muß etliche Einschränkungen des Gültigkeitsbereiches der Steigungsparameter beachten (siehe Kapitel 3 und die Zusammenfassung in Kapitel 13). Beim Modell #5 muß man wegen der Wurzelterme zusätzliche Einschränkungen beachten (Gl.3.23), um Singularitäten zu vermeiden.
- Die Modelle #1, #6 und #7 koppeln die beiden Steigungen. Man muß erwarten, daß sich die beiden Steigungen $m_{\perp\parallel}$ und $m_{\perp\perp}$ unabhängig einstellen können. Die (inhomogenen) Modelle #4 und #5 würden dagegen erlauben, diesen Sachverhalt zu erfassen. Die Anpassung nur für (σ_2, τ_{21}) -Versuche führt allerdings bei jedem der Datensätze zu numerischen Schwierigkeiten, da der zweite Parameter $\mu_{\perp\perp} = \mu_{nt}$ bzw. $m_{\perp\perp}$ aufgrund fehlender entsprechender Versuche nur schlecht

geschätzt werden kann. Außerdem ergibt sich der Bruchwinkel größer als bei allen anderen Modellen. Zur Schätzung von $\mu_{\perp\perp}$ und $m_{\perp\perp}$ müßten zuverlässige Daten aus (σ_2, τ_{23}) - oder (σ_2, σ_3) -Versuchen vorliegen.

- Messungen des Bruchwinkels θ_B können nur bedingt zur Schätzung der Steigungsparameter herangezogen werden, zudem sind diese Messungen versuchstechnisch schwierig. Eindeutige, analytisch ermittelbare Voraussagen sind nur beim Modell #1 bei (σ_2, τ_{21}) -Versuchen möglich. In allen anderen Fällen muß θ_B über eine numerische Optimierung bestimmt werden (maximale Bruchgefahr). Dabei gibt es Spannungskombinationen, bei denen die Bruchgefahr mehrere lokale Maxima aufweist (siehe die *Bilder 4/8b* und *4/9b*), θ_B also nicht eindeutig vorausgesagt werden kann. Für die Ermittlung von Bruchgefahr, Anstrengung, Reservefaktor ist dieser Effekt aber unkritisch.
- Für die Praxis wird empfohlen, die Mittelwerte der Basis-Festigkeitswerte vorab zu bestimmen und nur den oder die Steigungsparameter zu schätzen. Zur Schätzung des einen Steigungsparameters im Modell #1 genügen einige (σ_2, τ_{21}) -Versuche im Bereich der größten Schubfestigkeiten, siehe *Bild 4/7*. Für die Modelle #4 und #5 sind zur Schätzung des zweiten Steigungsparameters ($\mu_{\perp\perp}$ bzw. $m_{\perp\perp}$) zusätzliche Versuche (σ_2^d, σ_3^d) oder (σ_2^d, τ_{23}) nötig. In diesem Fall wird empfohlen, nach Möglichkeit beide Steigungsparameter aus Bruchkurven zu ermitteln. Wenn man die Einschränkungen einhält (siehe hierzu die Ausführungen in Abschnitt 3.1 und zusammenfassend in 13.3), kann man den zweiten Steigungsparameter $m_{\perp\perp}$ auch aus Messungen des Bruchwinkels θ_B^d abschätzen.

Da Modell #1 den komplizierteren Modellen bezüglich der Datenanpassung nicht nachsteht und homogen ist, kann es für die praktische Anwendung empfohlen werden. Modell #1 erlaubt zudem, den Bruchwinkel für den wichtigen Fall des ebenen Spannungszustandes (σ_2, τ_{21}) analytisch zu bestimmen. Falls sich die Quotienten $m_{\perp\perp}/R_{\perp\perp}$ und $m_{\perp\perp}/R_{\perp\perp}^M$ wesentlich voneinander unterscheiden, kann man für eine verfeinerte Analyse Modell #4 oder Modell #5 verwenden.

5 STRUKTURZUVERLÄSSIGKEIT VON FKV-BAUTEILEN [RR,SG]

5.1 Einführung in die Theorie der Strukturzuverlässigkeit

5.1.1 Allgemeines

In der Strukturanalyse sind streuende Konstruktionsparameter vorhanden. Deren Unsicherheit ist *physikalischer Natur* (Schwankungen bei Konstruktionsparametern wie Festigkeit, Lasten und deren Kombinationen, Steifigkeit, Geometrie, Fertigungstoleranzen usw.) oder *statistischer Natur* (Informationsmangel infolge zu kleiner Stichprobengröße für einen bestimmten Konstruktionsparameter). Außerdem liegt in der Regel eine *Unsicherheit des Rechenmodells (Mechanisches Modell)* und der Messung selbst vor.

Die Berücksichtigung der Streuung von Konstruktionsparametern und der anderen Unsicherheiten erfolgt deterministisch durch die Einführung von festen, erfahrungsbedingten *Entwurfs-Sicherheitsfaktoren*. In der Luft- und Raumfahrt beruht die Auslegung von Bauteilen auf ausreichende Zuverlässigkeit im traditionellen deterministischen Sicherheitskonzept auf der Vorgabe solcher, die *Sichere Last* (design limit load) *steigernden* Sicherheitsfaktoren. Daneben gibt es noch das deterministische Sicherheitskonzept der Zulässigen Spannungen mit *Festigkeit abmindernden* Sicherheitsfaktoren. Als Dimensionierungskennwerte (charakteristischer Wert) für die Lasten und Festigkeiten werden oberer und unterer Toleranzgrenzwert der zugehörigen Verteilung verwendet. Mit diesem Sicherheitskonzept ist nur eine qualitative Aussage über die Strukturzuverlässigkeit möglich.

Quantitative Aussagen erhält man, wenn die Unsicherheiten mit den Mitteln der Statistik und Wahrscheinlichkeitslehre beschrieben werden, sowie die Grenze zwischen sicherem Zustand der Struktur und Versagenszustand durch eine Funktion, die sogenannte Grenzzustandsfunktion, festgelegt wird und dann die Zuverlässigkeit als Wahrscheinlichkeit für den sicheren Zustand (oder die Versagenswahrscheinlichkeit für den Versagenszustand) berechnet wird. Bei diesem Probabilistischen Sicherheitskonzept werden die einzelnen voneinander unabhängigen Versagensmoden (FB, ZFB) zusammen betrachtet. Es wird ihre gemeinsame Versagenswahrscheinlichkeit bestimmt statt pro Versagensmodus jeweils eine Sicherheitsmarge.

Im Hinblick auf die stochastische Modellierung unterscheidet man dabei grundsätzlich zwei verschiedene Fälle. Im ersten Fall unterstellt man, daß die unsicheren Größen durch Zufallsvariable dargestellt werden können. Dann ist folgende Aufgabe zu lösen:

Es sei $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_n)^T$ ein Vektor von Zufallsvariablen (der Zufallsvektor) mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F(\mathbf{x})$. $g(\mathbf{x})$ sei die Zustandsfunktion, so daß $g(\mathbf{x}) > 0$ den sicheren Zustand, $g(\mathbf{x}) = 0$ den Grenzzustand und $g(\mathbf{x}) \leq 0$ den Versagenszustand bezeichnet. Die Fall $g(\mathbf{x}) = 0$ wird im folgenden auch als Versagensgrenzfläche bezeichnet. Die Versagenswahrscheinlichkeit ist dann

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.1)$$

und $f(\mathbf{x})$ ist die gemeinsame Dichtefunktion des Vektors $\mathbf{X}$. Im einfachsten Fall ist $g(\mathbf{x}) = r - s$ wobei r ein Widerstand und s eine Einwirkung auf das System ist. Versagen tritt ein, wenn die Einwirkung den Widerstand übertrifft. Wenn Widerstand und/oder Einwirkung zufällig sind und die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{R,S}(r,s)$ haben, so ist die Versagenswahrscheinlichkeit nichts anderes als das Volumen der Wahrscheinlichkeitsdichten im Versagensbereich [HSF93]. Für hochdimensionale Zufallsvektoren ist die Integration dieses Volumens sehr aufwendig und damit kaum praktikabel. Daher wurden Näherungsverfahren entwickelt, die auch bei erträglichem Aufwand diese Wahrscheinlichkeiten zu berechnen erlauben. Eines dieser Verfahren wird in Kapitel 5.1.2 näher beschrieben.

Im zweiten Fall (zeitvariant) werden die Lasten durch sog. Zufallsprozesse modelliert (s. z.B. [HSF93]). Widerstandsparameter und geometrische unsichere Größen werden wie im ersten Fall durch Zufallsvariable modelliert. Wenn sich zumindest ein Teil der Variablen in der Zeit zufällig ändert, macht es wenig Sinn, die Versagenswahrscheinlichkeit nach Gl. (5.1) als "Punktwahrscheinlichkeit" für einen bestimmten Zeitpunkt zu bestimmen. Vielmehr ist die Wahrscheinlichkeit gefragt, daß die nunmehr ebenfalls in zufälliger Weise von der Zeit abhängige Zustandsfunktion zum ersten Mal in den Versagensbereich eintritt. Diese Wahrscheinlichkeit ist allgemein wesentlich schwieriger zu berechnen als für die Aufgabe in Gl. (5.1). Hierzu eignet sich gut die Methode der sog. Schwellenwertkreuzungen. Bei dieser gilt für kleine Versagenswahrscheinlichkeiten

$$P_f(t) \leq P_f(0) + (1 - P_f(0))E[N(t)] \quad (5.2)$$

mit $E[N(t)] = \int_0^t v(\tau) d\tau$, (5.3)

dem Mittelwert der Anzahl der Eintritte in den Versagensbereich. Der Operator E bedeutet Erwartungswertbildung und $v(\tau)$ ist die Rate der Austritte vom sicheren Zustand in den Versagenszustand. Diese Rate ist im allgemeinen schwierig zu ermitteln. Die angegebene obere Schranke ist gut bei kleinen Versagenswahrscheinlichkeiten und versagt bei großem $E[N(t)]$. Wenn $E[N(t)]$ in der Tat klein ist, kann man meist ohne großen Fehler $P_f(0) = 0$ setzen. Die gemachten Einschränkungen sind für die Strukturzuverlässigkeit im allgemeinen nicht schwerwiegend, da grundsätzlich kleine Versagenswahrscheinlichkeiten, etwa in der Größenordnung von 10^{-3} bis hinunter zu 10^{-6} angestrebt werden.

Der zeitvariante Fall wird im weiteren jedoch nicht näher beschrieben, und auch die numerischen Rechnungen beschränken sich sämtlich auf den zeitinvarianten Fall. In einem Sonderfall kann man ein zeitvariantes Problem auch als zeitinvariantes Problem anhand Gl. (5.1) formulieren. Bei diesem Sonderfall darf es nur eine Prozeßvariable geben. Das Verteilungsgesetz dieser Variablen ist dann jedoch die Extremwertverteilung im betreffenden Zeitintervall.

5.1.2 Zuverlässigkeitsmethode erster und zweiter Ordnung (FORM/SORM)

Die Grundidee dieser Methoden ist die Integration auf den wesentlichen Bereich zu beschränken und dort die Versagensgrenzfläche zu nähern. Außerdem wird eine Verteilungstransformation

durchgeführt, so daß zwei analytische Ergebnisse für die Auswertung des Integrals für die Versagenswahrscheinlichkeit verwendet werden können.

Die Methode *erster* Ordnung wurde ursprünglich von [HaL74] für normale Vektoren $\mathbf{X}$ abgeleitet und später für allgemeine Verteilungen verallgemeinert [Rac78]. Zunächst wird eine Verteilungstransformation $\mathbf{U} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{X})$ durchgeführt. Darin ist $\mathbf{X}$ der Vektor der Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. $\mathbf{U}$ ist ein unabhängiger standard-normalverteilter Vektor. Für diese Transformation gilt immer

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{g(\mathbf{T}(\mathbf{u})) \leq 0} \varphi_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad , \quad (5.4)$$

wobei $\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist. Für eine solche Verteilungstransformation liegen mehrere, allerdings nicht ganz gleichwertige Möglichkeiten vor [Rac78]; [Hoh81]; [Kiu86]; [Win87]. Sie sind in Rechenprogrammen implementiert. Nun wird die Grenzzustandsfunktion in dem Punkt, wo die Dichte den größten Wert im Versagensbereich hat, dem wahrscheinlichsten Versagenspunkt, auch Bemessungspunkt genannt, linearisiert. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsschätzung erster Ordnung aus der Beziehung

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (5.5)$$

mit $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$ und $\mathbf{u}^*$ als Lösung des folgenden Optimierungsproblems:

$$\mathbf{u}^* = \min \|\mathbf{u}^*\| \quad \text{für } \{\mathbf{u}: g(\mathbf{u}) \leq 0\}. \quad (5.6)$$

$\Phi(\cdot)$ ist das Normalverteilungsintegral. Formel (5.5) ist exakt, wenn die Grenzzustandsfunktion linear ist (auch nach der Verteilungstransformation). Damit ist die Ermittlung eines zumeist hochdimensionalen Volumenintegrals im wesentlichen auf die Lösung eines Optimierungsproblems sowie einfache Zusatzrechnungen zurückgeführt. Hierfür muß sowohl die Verteilungsfunktion von $\mathbf{X}$ wie auch die Zustandsfunktion differenzierbar sein, was in der Praxis durch geeignete Glättungen bzw. Formulierungen immer erreicht werden kann. Diese Wahrscheinlichkeitsschätzung (FORM) ist für die meisten praktischen Belange schon ausreichend genau.

Für die Zuverlässigkeitsmethode *zweiter* Ordnung (SORM) ist ebenfalls die genannte Verteilungstransformation zweckmäßig. Breitung [Brei84] fand, daß unter Verwendung eines schon von Laplace 1821 angegebenen asymptotischen Arguments eine asymptotisch ($\beta \rightarrow \infty$ bzw. $P_f \rightarrow 0$) exakte Wahrscheinlichkeitsschätzung durchgeführt werden kann

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \beta \kappa_i)^{1/2} \quad . \quad (5.7)$$

Hierin sind die κ_i die Hauptkrümmungen der Versagensfläche im Punkt $\mathbf{u}^*$, für den wie für FORM $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$ ist (Gl.5.6). Diese Formel entspricht der Anpassung der Versagensgrenzfläche im β -Punkt durch ein Paraboloid. In diesem Fall muß die Grenzzustandsfunktion zweimal differenzierbar sein. Diese Ergebnisse wurden in vielfacher Hinsicht verallgemeinert und z.T. auch verbessert, z.B. [Tve83]; [Hoh87]. Adaptive Monte Carlo Verfahren können zur weiteren Qualitätsverbesserung,

und wenn die Anforderungen an die Differenzierbarkeit der Verteilungen und der Zustandsfunktionen nicht gegeben ist, eingesetzt werden. Es wird auf die angegebene Literatur verwiesen. Die vorgestellten Ansätze einschließlich der notwendigen Verteilungstransformationen sind verschiedentlich in kommerziellen Rechenprogrammen implementiert, z.B. in COMREL [Com96], welches später für die numerischen Rechnungen verwendet wird.

Wichtige Information enthalten verschiedene Sensitivitätsmaße, d.h. Maße, die die Empfindlichkeit der Versagenswahrscheinlichkeit gegenüber Änderungen der Parameter, hier der Festigkeitsparameter, kennzeichnen. Mit $\beta_E = -\Phi^{-1}(P_f)$, dem verallgemeinerten Sicherheitsindex, gilt beispielsweise

$$\alpha_{E,i} = \frac{\partial \beta_E}{\partial u_i} \frac{1}{\|\alpha_E\|} \approx \alpha_i \quad . \quad (5.8)$$

Vorgenannte α -Werte geben die Wichtigkeit einer Zufallsvariablen im Hinblick auf den Sicherheitsindex β_E an. Aufgrund der Normalisierung können sie zwischen -1 und + 1 liegen. Kleine Werte gehören zu den "unwichtigen" Variablen, große Werte gehören zu "wichtigen" Variablen.

Das gilt jedoch nur im Raum der unabhängigen, standard-normal verteilten Variablen (**U**-Raum). Deshalb sind diese α 's nur bei unabhängigen Zufallsvariablen eindeutig interpretierbar. Ähnlich kann man sogenannte *Elastizitäten* für deterministische Parameter (p_j) definieren, die aus Zweckmäßigkeitsgründen dimensionlos gemacht werden

$$e_{p,j} = \frac{\partial \beta_E}{\partial p_j} \frac{p_j}{|\beta_E|} \quad . \quad (5.9)$$

Die Elastizitäten sind zwar keine normierten Größen, sie sind aber für verschiedene Formulierungen der Zustandsfunktion $g(\mathbf{X})$ - etwa in N oder kN - gleich und auch für verschiedene Zuverlässigkeitsniveaus vergleichbar. Sie geben auch bei abhängigen Zufallsvariablen ein gutes Bild der Wichtigkeit.

Es soll erwähnt werden, daß man auch ohne die Verteilungstransformationen, die in der numerischen Rechnung gewissen Aufwand erzeugen können, ähnlich genaue Ergebnisse erhalten werden können. Dann wird die Optimierungsaufgabe für die Suche des kritischen Punktes jedoch aufwendiger. Der entscheidende Nachteil dieser alternativen Vorgehensweise liegt jedoch darin, daß eine Theorie erster Ordnung nicht ohne gewisse Einschränkungen ableitbar ist.

In Abschnitt 1.3.2 ist dargelegt, daß es bei der zuverlässigkeitsorientierten Auslegung von FKV-Bauteilen durchaus notwendig werden kann, das Bauteil als System aufzufassen - und zwar sowohl als Parallelsystem im Hinblick auf die redundante Anordnung der tragenden Schichten in einem Laminat als auch als Seriensystem im Hinblick auf die verschiedenen Versagensmoden in verschiedenen Punkten (Elementen) der Schichten im Laminat. Eine entsprechende Theorie liegt ebenfalls vor und ist in Programmen realisiert worden. Ihre Anwendung auf FKV ist jedoch außerordentlich aufwendig und muß zukünftigen Arbeiten vorbehalten bleiben (siehe jedoch [Cun88] und [Pli 95]).

Eine Auslegung einer Struktur ist sicher, wenn die berechnete Versagenswahrscheinlichkeit kleiner oder gleich einer vorgegebenen Versagenswahrscheinlichkeit ist. Hier haben sich die Anhaltswerte in Tabelle 5/1 aus ([HSF93]) als praktikabel erwiesen.

Tabelle 5/1: Empfohlene Ziel-Versagenswahrscheinlichkeiten

Aufwand zur Erzielung von Zuverlässigkeit	Schadensfolgen bei			Verlust der Gebrauchsfähigkeit
	Funktionsuntüchtigkeit klein	und/oder mittel	Systemverlust groß	
klein	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-4}
mittel	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-3}
groß	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-2}

Die angegebenen Zahlenwerte sind Richtwerte für zuverlässige Systeme. Für Systeme mit besonders hohen Zuverlässigkeitsanforderungen können um mindestens eine Größenordnung kleinere und für Systeme mit besonders hohem Aufwand für Zuverlässigkeit um mindestens eine Größenordnung höhere Werte erforderlich sein.

5.1.3 Zusammenhang zwischen exakter Rechnung und Teilsicherheitsfaktoren

Besondere Bedeutung erhalten FORM und SORM durch die Tatsache, daß man den β -Punkt (Bemessungspunkt, Versagenspunkt) in der klassischen Weise durch Teilsicherheitsfaktoren ausdrücken kann. Sie sind durch

$$\gamma_i = x_i^* / x_{c,i} \quad (5.10)$$

definiert, wobei $x_i^* = F_i^{-1}[\Phi(u_i^*)] = F_i^{-1}[\Phi(\alpha_i \beta)]$ der Bemessungswert und $x_{c,i}$ der charakteristische Wert der gewöhnlich als Quantil in der Verteilung der Größe (Konstruktionsparameter) X_i definiert ist. F_i^{-1} ist die inverse Verteilungsfunktion der i -ten unsicheren Größe. Die Definition, Gl.(5.10), gilt für sog. Einwirkungsvariable, bei denen der Bemessungswert gewöhnlich größer ist als der charakteristische Wert. X_i ist eine Größe, für die die Ableitung der Grenzzustandsfunktion negativ wird. Damit wird in der Regel ein Wert größer Eins für den Teilsicherheitsfaktor erhalten.

Wenn die Ableitung der Grenzzustandsfunktion noch positiv ist, ist die Variable eine Widerstandsvariable. Der entsprechende Teilsicherheitsfaktor wird durch

$$\gamma_i = x_{c,i} / x_i^* \quad (5.11)$$

definiert, um auch in diesem Fall einen Teilsicherheitsfaktor größer als Eins zu erhalten.

Es ist wichtig hier zu bemerken, daß in diesem "Konzept der Teilsicherheitsfaktoren" alle unsicheren Variablen - nicht nur die Lastgrößen wie in der Luft- und Raumfahrt mit ihren laststeigern-

den Sicherheitsfaktoren - einen solchen Teilsicherheitsfaktor (-Beiwert) erhalten. Damit kann zumindest im Prinzip zwischen probabilistischer Rechnung und der Rechnung mit Teilsicherheitsfaktoren eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz hergestellt werden.

Die Beziehung $x_i^* = F_i^{-1}[\Phi(u_i^*)] = F_i^{-1}[\Phi(-\alpha_i \beta)]$ erlaubt eine verallgemeinerte *repräsentative Sensitivität* ($\alpha_{r,i}$) zu definieren, die auch für abhängige Variable gilt und sich auf die in (Gl.5.9) definierte Sensitivität im Fall unabhängiger Variabler reduziert. Hierzu ist diese Beziehung nach α_i aufzulösen

$$\alpha_{r,i} = -\Phi^{-1}\left[F_i(x_i^*)\right] / \beta \quad (5.12)$$

5.2 Stochastisches Modell für unsichere Größen

Für jede Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit benötigt man ein vollständiges stochastisches Modell, d.h. die Verteilungsfunktionen der unsicheren Größen wie der Basis-Festigkeiten und gegebenenfalls deren stochastischen Abhängigkeiten, ausgedrückt durch Korrelationskoeffizienten oder durch eine Folge bedingter Verteilungen. Die Festlegung dieses stochastischen Modells ist bei jeder Aufgabe sehr sorgfältig vorzunehmen und oft ist eine Berechnung auch mit alternativen Modellen zu wiederholen, um Einblick in die Empfindlichkeit gegenüber den Annahmen zu gewinnen. Berechnete Versagenswahrscheinlichkeiten reagieren im allgemeinen sehr empfindlich auf diese grundlegenden Annahmen. Es sind vor allem die extremen Bereiche, die bei der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit eine herausragende Rolle spielen. Die zur Verfügung stehenden Rechenprogramme ermöglichen im allgemeinen unter relativ vielen Modellen zu wählen. So gesehen sind auch die berechneten Versagenswahrscheinlichkeiten nur bei Kenntnis des zugrundegelegten stochastischen Modells vernünftig interpretierbar und daher auch nur dann vergleichbar, wenn von den gleichen stochastischen Modellen ausgegangen wird. Bei der Auswahl sind einige allgemeine Grundsätze zu beachten. Bei Variablen, die aus physikalischen Gründen nur positiv (oder negativ) sein können, sollten nur solche Modelle ausgewählt werden, die dieser Bedingung genügen. Manche Modelle sind das Ergebnis einfacher Operationen wie der Mittelwertbildung oder der Extremwertbildung. Auch wenn der tatsächliche physikalische Sachverhalt kompliziertere Zusammenhänge nahelegt, sollte durch Vereinfachung dieser Zusammenhänge auf die genannten Operationen die Anzahl der zulässigen stochastischen Modelle eingeschränkt werden können. Schließlich gibt es eine Reihe von erst bei der Anwendung ersichtlichen Beschränkungen. Da in den meisten Fällen weit über die Datenbasis hinaus extrapoliert werden muß, kann es vorkommen, daß bestimmte Modelle zwar für den durch Daten belegten mittleren Bereich durchaus zulässig erscheinen, in der Extrapolation auf die extremen Realisationen des zufälligen Phänomens jedoch grob falsche Ergebnisse ergeben. Z.B. weist die sehr gebräuchliche Lognormalverteilung hohen Werten eine zu hohe Wahrscheinlichkeit zu. Dieses Modell ist daher unrealistisch für Lasten, kann aber sehr wohl für Widerstände verwendet werden. In den Rechenbeispielen wurden bezüglich der Modellauswahl daher folgende Grundsätze befolgt:

- Belastungen, die in der Zeit nicht veränderlich sind, wie z.B. Eigengewichtslasten, werden durch Normalverteilungen modelliert.
- Belastungen, die in der Zeit veränderlich und stationär sind, werden durch die Gumbelverteilung, eine asymptotische Extremwertverteilung für die Maxima einer Folge von Realisationen, modelliert.
- Geometrische unsichere Variable wie Dicken werden durch eine Lognormalverteilung modelliert, wenn Streuungen in diesen Variablen in Bezug auf die Zuverlässigkeit ungünstig wirken und klein sind. Sonst wird von der Normalverteilung ausgegangen.
- Alle Festigkeitsparameter werden als Weibullverteilung modelliert. Das ist konservativ, da der untere Bereich der Weibullverteilung hohe Wahrscheinlichkeiten aufweist (s. a. Abschnitt 5.3).
- Modellunsicherheiten werden durch Faktoren auf die Größen erfaßt, auf die sie wirken. Sie werden durch eine Lognormalverteilung modelliert. Dabei ist in der Regel der Mittelwert gleich Eins wenn das verwendete Modell biasfrei ist, also keine systematischen Abweichungen enthält.
- Statistische Unsicherheiten werden durch normalverteilte Verteilungsparameter modelliert.

5.3 Berücksichtigung des Größeneffektes

5.3.1 Theorie

Weibull hat 1939 [Wei39] die Grundlagen für eine statistische Theorie der Festigkeit spröder Werkstoffe entwickelt. Danach besteht ein Körper bestimmten Volumens aus einer großen Anzahl von Elementen, die eine statistisch verteilte Elementfestigkeit besitzen. Der Körper versagt unter derjenigen Spannung, die der kleinsten Elementfestigkeit entspricht. Große Körper versagen daher früher. Es gilt das Modell des "schwächsten Gliedes" in einer Kette. Die Verteilungsfunktion der Festigkeit eines Körpers mit Volumen V ist daher

$$F_X(x) = 1 - \exp \left[-\frac{V}{V_0} \left(\frac{x - \tau}{w - \tau} \right)^k \right] \quad (5.13)$$

mit w einem Lageparameter, k einem Gestalts(Streuungs-)parameter, τ einer unteren Festigkeitschranke für die Verteilungsfunktion der für das Referenzvolumen V_0 geltenden Festigkeiten. Für die am Referenzvolumen beobachtbaren Festigkeiten gilt daher die Standardform

$$F_X(x) = 1 - \exp \left[-\left(\frac{x - \tau}{w - \tau} \right)^k \right] \quad (5.14)$$

mit Mittelwert und Varianz

$$\mu_0 = E[X] = (w - \tau) \Gamma \left(1 + \frac{1}{k} \right) \quad (5.15a)$$

$$\sigma_0^2 = \text{Var}[X] = (w - \tau)^2 \left(\Gamma \left(1 + \frac{2}{k} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) \quad (5.15b)$$

Gl. (5.13) kann ebenfalls in der Standardform geschrieben werden

$$F_X(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - \tau}{w_V - \tau} \right)^k \right] \quad \text{mit} \quad w_V = \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/k} \cdot (w - \tau) + \tau \quad (5.16)$$

Damit verhalten sich die mittleren Festigkeiten des Volumens V und des Referenzvolumens wie

$$\frac{w_V - \tau}{w - \tau} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/k} \quad (5.17)$$

Das ist der berühmte Weibulleffekt. Er wurde für viele spröde Werkstoffe, wie z.B. Glas, Textilfasern, Spanndrähte, etc. auch experimentell bei einachsiger Beanspruchung verifiziert. Freudenthal [Freu68] hat den "Elementen" im Probekörpervolumen die physikalisch sinnvollere Interpretation von Defekten gegeben. Damit läßt sich die Theorie leicht auf inhomogene Spannungs- bzw. Defektverteilung verallgemeinern. In neuerer Zeit versteht man den Defekt vornehmlich als kleinen Riß. Mit dieser Interpretation gelang die Verallgemeinerung der Theorie auf zwei- und einige dreiaxiale Spannungszustände. Dann ist der Riß nicht mehr ein einfacher Zugriß, sondern weist die mehrachsige Zug-Schubbeanspruchung des allgemeinen Mixed-Mode Falles der Bruchmechanik auf [Bat74], [Mat81].

5.3.2 Das Weibullmodell für faserverstärkte Kunststoffe

Faserverstärkte Kunststoffe können bei faserparalleler Zugbeanspruchung (FB) sehr gut durch das Weibullmodell beschrieben werden. Es entsteht im allgemeinen aber nicht aus dem ursprünglichen, einfachen Modell. Bei nicht zu fester Matrix gilt nämlich zunächst das sogenannte Danielsmodell, d.h. eine Parallelschaltung vieler Fasern, welches als Grenzverteilung die Normalverteilung ohne jeden Größeneffekt besitzt. Bei höherer Beanspruchung ergeben sich dann Spannungskonzentrationen an bereits defekten Fasern und diese führen dann doch wieder zur Weibullverteilung als Grenzverteilung, allerdings mit etwas anderer Abhängigkeit der Verteilungsparameter von der Größe des Körpers. Im Experiment erweist sich eine Weibullverteilung mit dem klassischen Größeneffekt aber als gut brauchbar.

Bei Zwischenfaserbruch infolge Querkzug, Quer/Quer- und Quer/Längs-Schub oder Querdruck ist die Lage nicht eindeutig. In allen diesen Fällen nimmt der Bruch wohl ebenfalls an der schwächsten Stelle seinen Anfang.

Bei Querkzug und relativ spröder Matrix wird sich der größte Defekt (kleiner Riß) wie in der Bruchmechanik vorausgesagt, entsprechend ausbreiten und schließlich mit einem sog Trennbruch instabil werden. Das wird eindeutig zur Weibullverteilung der Querkzugfestigkeiten führen. (Bei relativ duktiler Matrix wird die Matrix über größere Bereiche und an mehreren Stellen plastifizieren. Der eigentliche Bruch, ein Gleitbruch, würde dann jedoch ebenfalls vom am meisten plastifizierten Querschnitt ausgehen. Theoretisch würde bei ideal duktiler Matrix eine Normalverteilung als Grenzverteilung zu erwarten sein.)

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei reiner Quer/Längs-Schubbeanspruchung der Schicht.

Im Querdruckversuch schert die Matrix unter dem Bruchwinkel ab. Kurz vor dem Bruch, wenn sich großflächig Verschiebungen der beiden Trennflächen ergeben, sollte man ebenfalls eine Tendenz zur Normalverteilung beobachten können, zumal ein erheblicher Teil des Widerstandes nun als Reibungswiderstand zu interpretieren ist.

Puck und Schürmann [Puc 82] haben Versuche an verschiedenen großen, aber bezüglich ihrer Gestalt ähnlichen Probekörpern durchgeführt (s. *Bild 5/1*). Hiernach ist bei Querzug ein Weibulleffekt für das verwendete Material eindeutig, für Quer/Längs-Schub aber weniger ausgeprägt.

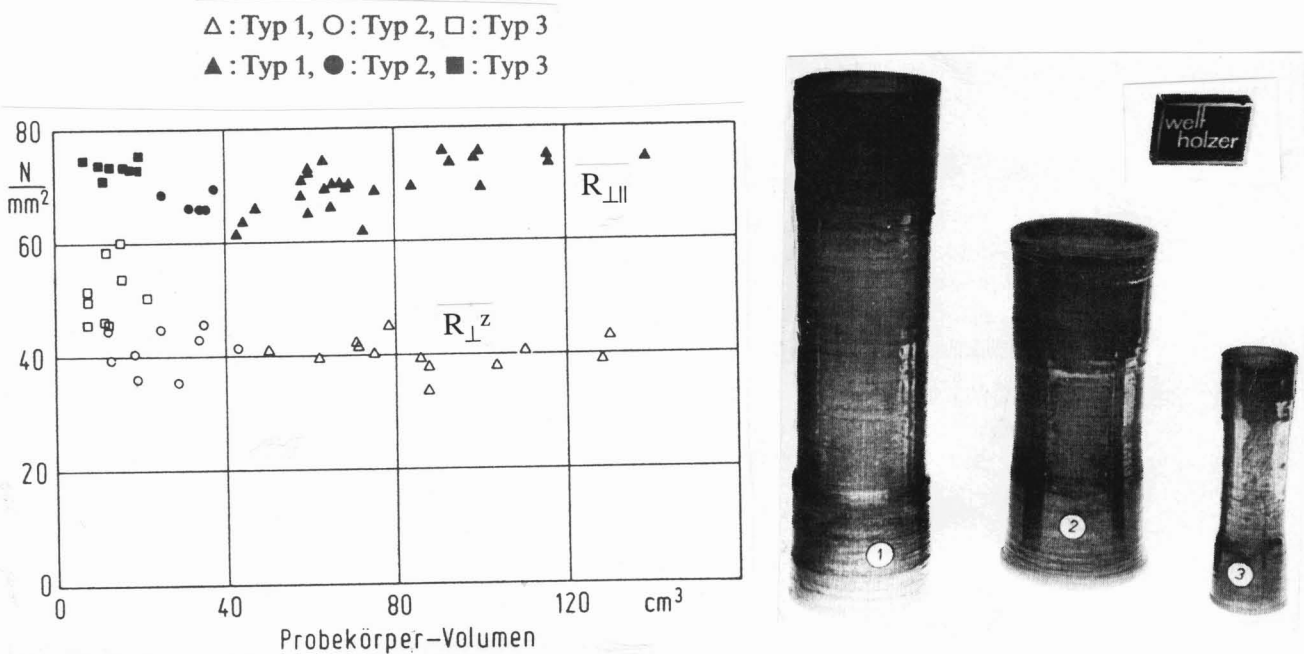


Bild 5/1: Einfluß des Probekörpervolumens auf die Festigkeiten von GFRP [Puc 82]

Typ 1: $d_i = 69 \text{ mm}$, $\ell_m = 160 \text{ mm}$, $t = 1,3 \text{ bis } 4 \text{ mm}$, Typ 2: $d_i = 69 \text{ mm}$, $\ell_m = 80 \text{ mm}$, $t = 0,7 \text{ bis } 2,4 \text{ mm}$, Typ 3: $d_i = 33 \text{ mm}$, $\ell_m = 80 \text{ mm}$, $t = 0,9 \text{ bis } 2,4 \text{ mm}$,
 d_i : Innendurchmesser, ℓ_m : Länge des Meßbereichs, t : Wanddicke

Die Versuchsergebnisse streuen jeweils relativ stark. Daß bei den Schubversuchen der Größeneffekt nur noch schwach ausgeprägt ist, kann jedoch auch an der Versuchstechnik liegen. Die Versuchsergebnisse erreichen im übrigen schon bei Volumina $> 60 \text{ cm}^3$ einen nahezu konstanten Wert. Würde eine Weibullverteilung gelten, müßte man das mit einer relativ hohen Mindestfestigkeit erklären.

5.3.3 Versuche zum Größeneffekt im Projekt und Schlußfolgerungen

Um über den Größeneffekt auch die Verteilungsfunktionen für die Festigkeitsparameter der allgemeinen Bruchbedingung belegen zu können, wurden im vorliegenden Projekt auch jeweils $N = 6$ Probekörper mit Volumina im Verhältnis 1:2:4 auf Querzug, Schub und Querdruck geprüft (*Bild 5/2*). Dabei mußte aus Kostengründen auf den Standardrohrprobekörper mit $d_i = 40 \text{ mm}$ jedoch mit unterschiedlicher Länge und Dicke zurückgegriffen werden.

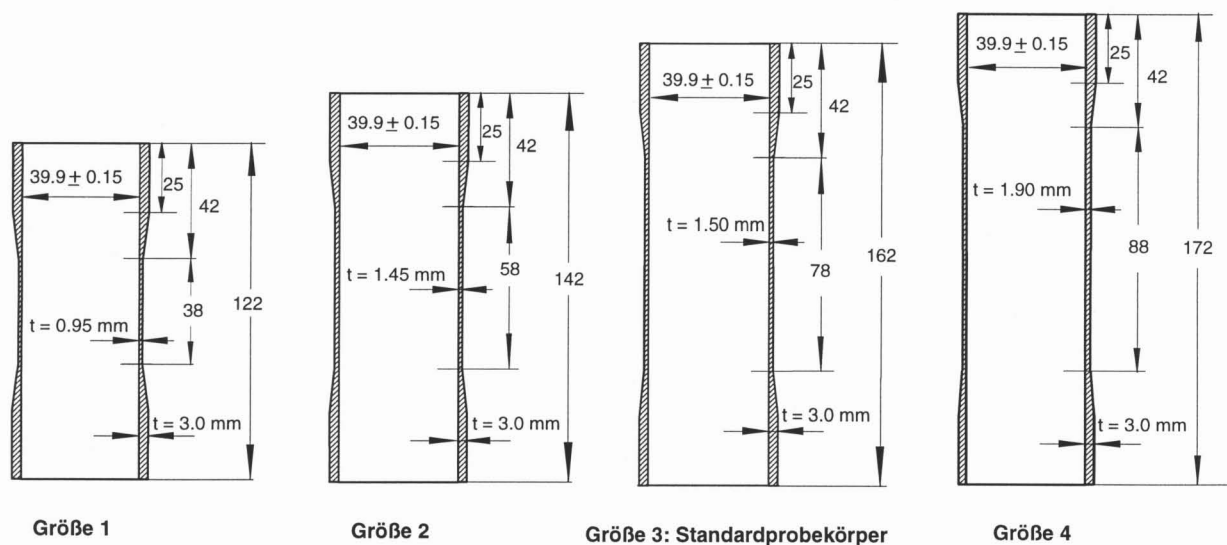


Bild 5/2: Im Projekt verwendete "Weibull"-Rohrprobekörper

Bild 5/3 zeigt die Ergebnisse im Überblick als Box-Whisker-Diagramm. Dort sind jeweils die Extremwerte der Versuchsreihe, der Median sowie die 25 %- bzw. 75 %-Quantile, die Hinweis auf die

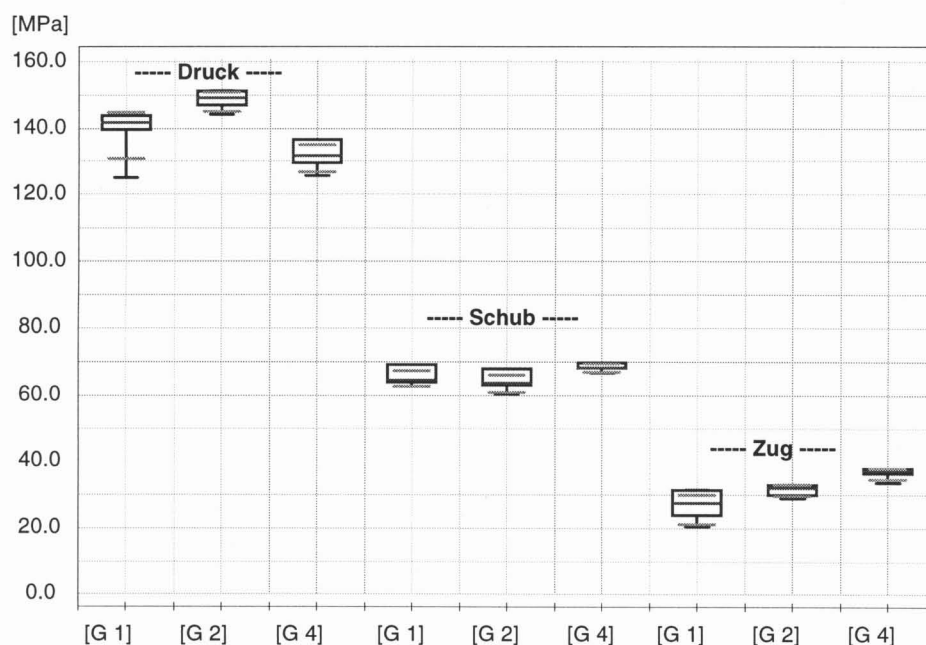


Bild 5/3: Box-Whisker Diagramm der Weibull-Versuche (Druck, Schub, Zug) für 3 Größen (1, 2, 4)

Streuung geben, aufgetragen. Hier zeigen die Zug- und Schubversuche eher einen Trend zu mit der Größe der Probekörper wachsenden mittleren Festigkeiten. Die Druckversuche zeigen keinen Trend. Es besteht kein Zweifel, daß hier Probenherstellung und Versuchstechnik für die beobachteten, systematischen Unterschiede verantwortlich sind. Das Verhältnis der Volumina war sicherlich nicht unterschiedlich genug und der Einfluß der relativ dünnen Wanddicke bzgl. der Oberflächenfehler relativ hoch.

Sowohl die in der Literatur vorhandenen als auch die im Projektrahmen realisierten Versuche belegen also leider nicht, daß ein Größeneffekt vorhanden ist. Daher soll auf eine Modifizierung der Versuchsdaten im Hinblick auf das Volumen der Probekörper bei der Auswertung der Daten verzichtet werden. Gleichwohl soll die Weibullverteilung als Verteilung für die Festigkeiten für Zuverlässigkeitsuntersuchungen, und zwar für alle Festigkeiten, beibehalten werden und das auch, weil die Weibullverteilung durch drei Verteilungsparameter recht anpassungsfähig ist. Bei positivem τ gilt sie nur im Bereich $> \tau$ und zeigt die vielfach beobachtete Rechtsschiefe. Sie ist auch ohne die zu ihrer Herleitung benutzte Begründung plausibel.

5.4 Beispielrechnungen, Teilsicherheitsfaktoren

5.4.1 Zuverlässigkeitsuntersuchungen in (σ_2, τ_{21}) -Raum

Eine Zuverlässigkeitsuntersuchung im (σ_2, τ_{21}) -Raum liefert, wie nachstehend gezeigt wird, wertvolle Einsichten über den Einfluß unsicherer Festigkeiten und Beanspruchungen. Damit wird auch der praktisch wichtigste Fall behandelt. Untersuchungen anderer Spannungskombinationen sind grundsätzlich ebenfalls möglich. Die Untersuchungen beschränken sich auf das einfache parabolische Modell. Für die anderen Modelle werden ähnliche Ergebnisse erhalten..

Stochastisches Modell

Die Basis-Festigkeitswerte (R-Werte) und die Spannungen σ_2, τ_{21} sind Zufallsvariable. Für alle R-Werte wird gemäß den Empfehlungen in Abschnitt 5.2 die Weibull-Verteilung gewählt. Die Spannungen sind als Beanspruchungen normalverteilt. Um den Einfluß von (kleinen) Abweichungen des Steigungsparameters p studieren zu können, wird dieser als Rechteck-Verteilung mit $0,14 \leq p \leq 0,16$ modelliert. Die Mittelwerte der R-Werte wurden so gewählt, daß die Bruchkurven für die Mittelwerte mit den Bildern 13/1 und 13/6 für GFK identisch sind. Die Variationskoeffizienten wurden wesentlich höher angenommen als in Tabelle 13/1, da die Datenbasis der Tabelle 13/1 zu klein ist. Außerdem muß davon ausgegangen werden, daß die Fertigungsgüte der Probekörper überdurchschnittlich ist. Alle Angaben sind in MPa, V steht für Variationskoeffizient.

Variable	$R_{\perp}^z$	$R_{ }$	$R_{\perp}^d$	p	σ_2	τ_{21}
Verteilung	Weibull	Weibull	Weibull	Rechteck	Normal	Normal
Mittelw.	40	61	144	0,150	s. Text	s. Text
Std.Abw.	5,85	5,85	10,1	0,006	-	-
V	14,6%	9,6%	7,0%	4,0%	15%	15%

Für die Parameterstudien der Bilder 5/4 und 5/5 werden die Mittelwerte der Spannungskombination (σ_2, τ_{21}) durch affine Verkleinerung der mittleren Bruchkurve mit einem Faktor 1,75 festgelegt. Als Parameter für die Bilder wird der Mittelwert von σ_2 genommen. Dieser kann somit im Bereich von $(-144/1,75) = -82$ bis $(40/1,75) = 22$ variiert werden. Daraus ergibt sich der zugehörige Mittelwert von τ_{21} . Die Standardabweichungen werden mit dem konstanten Variationskoeffizienten aus den

Mittelwerten nach $S[X_i] = V[X_i] \cdot E[X_i]$ festgelegt. Die beiden Spannungen werden als mit dem Koeffizienten $\rho = \pm 0.80$ korreliert angenommen, da man davon ausgehen muß, daß beide Spannungen überwiegend durch die gleiche Belastung erzeugt werden. Hierbei gilt das positive Vorzeichen für Zugspannungen σ_2 und das negative Vorzeichen für Druckspannungen σ_2 . Korrelationen für die angreifenden Spannungen hängen stark vom jeweiligen Anwendungsfall ab.

Auch die R-Werte werden miteinander korreliert, und zwar mit

$$\rho[R_{\perp^z}, R_{\perp^d}] = +0,30; \quad \rho[R_{\perp^d}, R_{\parallel}] = +0,50; \quad \rho[R_{\perp^z}, R_{\parallel}] = +0,80 .$$

Damit soll erfaßt werden, daß alle R-Werte mehr oder weniger von der Matrix-Festigkeit abhängen, die Abhängigkeit von $R_{\perp^z}$ und $R_{\perp^d}$ aufgrund der sehr unterschiedlichen Bruchmodi relativ klein ist und entsprechend jene von $R_{\perp^z}$ und $R_{\parallel}$ wegen ähnlichen Matrix-Bruchverhaltens relativ ausgeprägt ist. Insgesamt sind Korrelationen für das erreichbare Zuverlässigkeitsniveau sehr bedeutend. Eine Rechnung ohne Korrelationen ist somit nicht wirklichkeitsnah. Leider sind Korrelationen für die R-Werte experimentell sehr schwierig zu bestimmen. Für die Interpretation der Wichtigkeit der Zufallsvariablen, also für die representativen Sensitivitäten (α_r) und für die Elastizitäten (e) sind Korrelationen nicht so bedeutend.

In Bild 5/4 ist der Zuverlässigkeitsindex über dem Mittelwert von σ_2 aufgetragen. Der "Buckel" bei $m(\sigma_2) \approx -65$ zeigt den Wechsel der Gültigkeitsbereiche von Gl.(13.9) zu Gl.(13.10) an. Der Über-

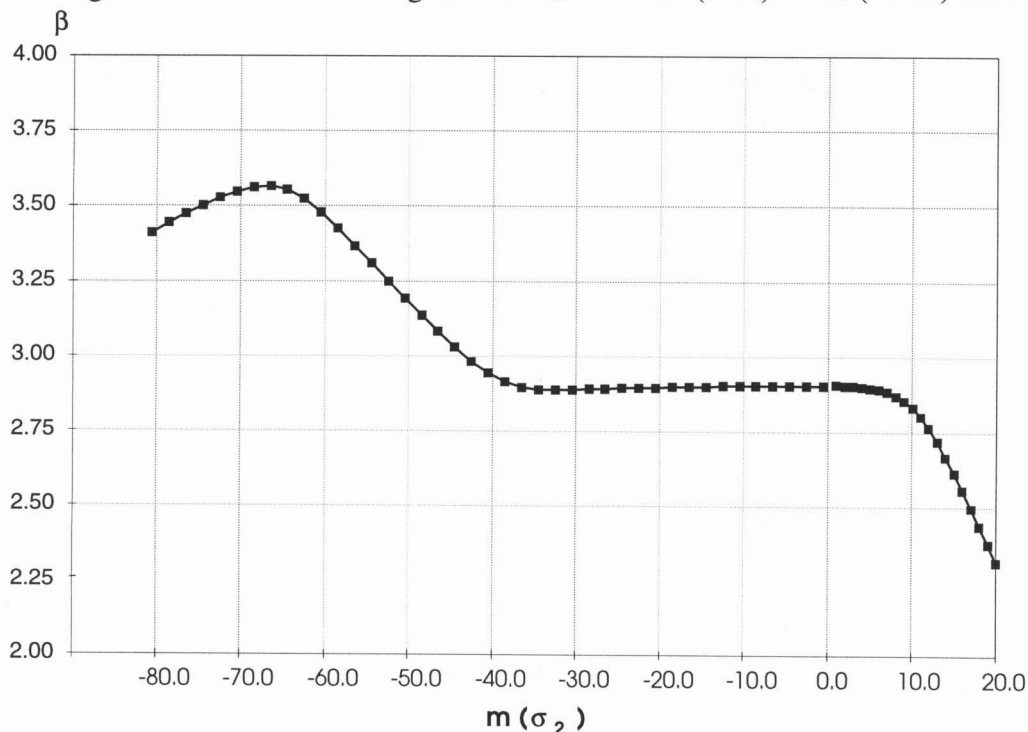


Bild 5/4: Zuverlässigkeitsindex β über Variation des Mittelwertes der "Last" σ_2

gang bei $\sigma_2 = 0$ auf den Zugmodus ist gleichmäßig und mit einem relativ starken Abfall des Zuverlässigkeitsindex verbunden. Dazwischen bleibt das Zuverlässigkeitsniveau erwartungsgemäß relativ konstant. Daß das Zuverlässigkeitsniveau bei Variation von $m(\sigma_2)$ schwankt, ist darauf zurückzuführen, daß die Mittelwerte $m(\sigma_2)$ und $m(\tau_{21})$ durch affine Verkleinerung (Faktor $1/1,75$) der Mit-

telwert-Bruchkurve erzeugt wurden. Damit kommt zum Ausdruck, daß in den verschiedenen Bereichen Unsicherheiten in den Spannungsvariablen unterschiedliche Bedeutung für die Zuverlässigkeit haben. Insbesondere wirken sich die verschieden großen Streuungen der Festigkeiten $R_{\perp}^z, R_{\perp||}$ und $R_{\perp}^d$ in den verschiedenen Bereichen der Bruchkurve aus. Zum Vergleich sind in Bild 5/5 auch die entsprechenden Zuverlässigkeiten $\mathfrak{R}$ angegeben.

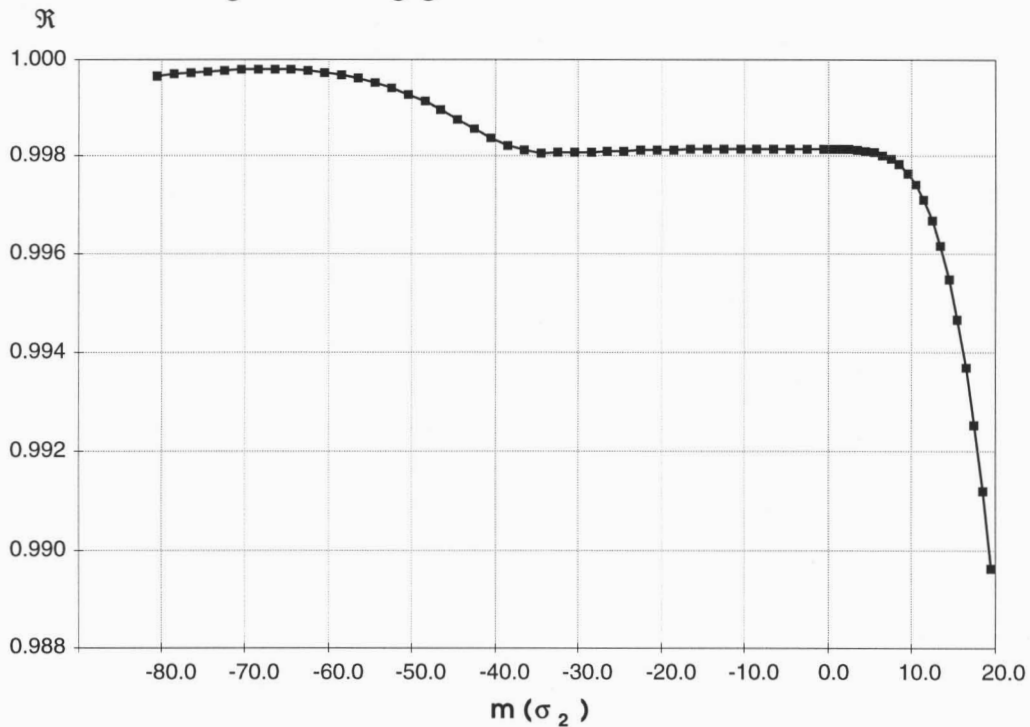


Bild 5/5: Zuverlässigkeit $\mathfrak{R}$ über Variation des Mittelwertes der "Last" σ_2

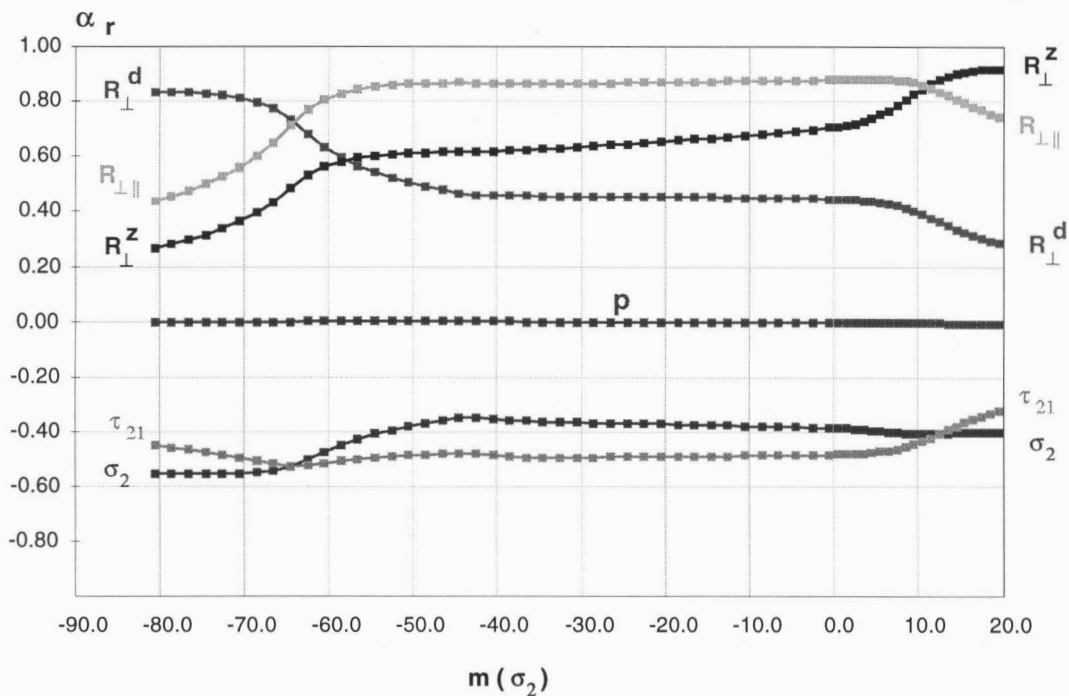


Bild 5/6: Einfluß α_i der Zufallsvariablen auf den Zuverlässigkeitsindex β über Variation des Mittelwertes der "Last" σ_2

In *Bild 5/6* erkennt man anhand der repräsentativen α -Werte, Gl. (5.12), deutlich den relativen Einfluß der unsicheren Basis-Festigkeiten und der unsicheren angreifenden Spannungen (σ_2, τ_{21}) in den verschiedenen Bereichen der Gl.(13.8 - 13.10). Insbesondere sieht man, daß der Einfluß des Steigungsparameters p sehr klein ist, weshalb er nun als feste Größe betrachtet werden soll. Bei der Interpretation muß berücksichtigt werden, daß die R-Werte und die Spannungen korreliert sind. Deshalb verschwindet z.B. der Einfluß von $R_{\perp}^d$ für $\sigma_2 > 0$ oder von $R_{\perp}^z$ für $\sigma_2 < 0$ infolge $\rho = +0,30$ nicht. In *Tabelle 5/2* sind für einige Spannungskombinationen sowohl die Zuverlässigkeitsindices als auch repräsentative α -Werte, Teilsicherheitsfaktoren und Elastizitäten angegeben

Zur Erläuterung: $P_f = 0,01 \rightarrow \beta \approx 2,3$; $P_f = 0,001 \rightarrow \beta \approx 3,1$; $P_f = 0,0001 \rightarrow \beta \approx 3,7$.

Tabelle 5/2: Repräsentative α -Werte, Teilsicherheitsfaktoren (γ) und Elastizitäten (e) an ausgewählten (σ_2, τ_{21})-Kombinationen

$\sigma_2; \tau_{21}$ ⁽¹⁾	-130 ; 45	-70 ; 75	-20 ; 65	+5 ; 60	+20 ; 45	+35 ; 2
$\sigma_2/1,75 \approx$ ⁽²⁾	-75	-40.0	-11	+3	+11	+20
β_{FORM}	3,49	2,90	2,93	2,86	2,88	2,29
β_{SORM}	3,44	2,91	2,93	2,84	2,82	2,28
$\alpha_r(R_{\perp}^z)$ ⁽³⁾	+0,32	+0,62	+0,68	+0,72	+0,88	+0,92
$\alpha_r(R_{\perp}^{ })$	+0,51	+0,86	+0,87	+0,88	+0,85	+0,74
$\alpha_r(R_{\perp}^d)$	+0,82	+0,46	+0,45	+0,44	+0,37	+0,28
$\alpha_r(\sigma_2)$	-0,55	-0,36	-0,37	-0,39	-0,39	-0,40
$\alpha_r(\tau_{21})$	-0,48	-0,49	-0,48	-0,48	-0,40	-0,32
$\gamma(R_{\perp}^z)$ ⁽⁴⁾	1,20	1,41	1,49	1,52	1,78	1,55
$\gamma(R_{\perp}^{ })$	1,24	1,43	1,45	1,43	1,41	1,22
$\gamma(R_{\perp}^d)$	1,38	1,11	1,11	1,10	1,08	1,04
$\gamma(\sigma_2)$	1,29	1,16	1,16	1,17	1,17	1,14
$\gamma(\tau_{21})$	1,25	1,21	1,21	1,21	1,17	1,11
$e(R_{\perp}^z)$ ⁽⁵⁾	-0,04	-0,36	-0,13	+0,07	+0,90	+1,94
$e(R_{\perp}^{ })$	+0,28	+2,20	+1,97	+1,82	+0,86	+0,01
$e(R_{\perp}^d)$	+1,62	+0	+0	+0	+0	+0
$e(p)$	+0,03	+0,26	+0,09	-0,03	-0,10	-0,15
$e(\sigma_2)$	-1,18	+0,26	+0,09	-0,05	-0,55	-1,31
$e(\tau_{21})$	-0,23	-1,59	-1,41	-1,32	-0,63	-0,01

(1) Spannungskombination auf der Mittelwerts-Bruchkurve, siehe z.B. *Bild 13/1* für GFK

(2) Der Wert $\sigma_2/1,75$ erlaubt den Vergleich mit *Bild 5/4*

(3) Es sind die repräsentativen α_r -Werte nach Gl.(5.12) angegeben.

- (4) Die Teilsicherheitsfaktoren (γ) sind auf den Mittelwert bezogen, siehe Gl.(5.10), (5.11)
- (5) Die Elastizitäten (e) sind normierte Sensitivitäten des Zuverlässigkeitsindex β auf eine Änderung der Mittelwerte $E(x_i)$. Die e 's sind untereinander vergleichbar (dimensionsrein).

5.4.2 Sandwich-Platte unter Scheiben- und Plattenbeanspruchung

Das folgende Beispiel dient nicht der Lösung einer konkreten Konstruktionsaufgabe sondern ist auf die Visualisierung der probabilistischen Analyse ausgelegt.

Geometrie, Randbedingungen, Element (siehe *Bild 5/4*)

- Plattenstreifen mit $L = 1000$ mm und $B = 300$ mm in der Ebene ($Z1 - Z2$)
- Punkt ($Z1 = 0, Z2 = 0$): Festhaltung in Richtung $Z1, Z2, Z3$
- Kante ($Z1=0, 0 \leq Z2 \leq 300$): Festhaltung in Richtung $Z1, Z3$
- Punkt ($Z1 = 1000, Z2 = 0$): Festhaltung in Richtung $Z2, Z3$
- Kante ($Z1=1000, 0 \leq Z2 \leq 300$): Festhaltung in Richtung $Z3$
- Kirchhoffsche Schalentheorie, klassische Laminattheorie, das Element ist in [Pli95] beschrieben

Lastfälle (deterministisch)

- Flächenlast ('*surface*') mit $0,01$ N/mm² in Richtung $-Z3$;
($\rightarrow$ max. Verformung am Punkt ($Z1 = 500, Z2 = 300$) = 24 mm in Richtung $Z3$)
- Einzellast ('*n_z1*') mit 100 kN am Punkt ($Z1 = 1000, Z2 = 300$) in Richtung $Z1$;
($\rightarrow$ max. Verformung am gleichen Punkt = $2,4$ mm in Richtung $Z1$ und $1,3$ mm in Richtung $-Z2$)

Laminataufbau und mechanische Eigenschaften

	GFK	Schaum
$E_{ }$ [MPa]	44 500	60
$E_{\perp}$ [MPa]	12 500	-
$G_{ }$ [MPa]	6 000	25
$\nu_{ }$ [-]	0,28	-
$\nu_{\perp}$ [-]	0,40	-
$\alpha_{T }$ [1/K]	$7 \cdot 10^{-6}$	-
$\alpha_{T\perp}$ [1/K]	$30 \cdot 10^{-6}$	-
ρ [kg/dm ³]	1,6	0,05

- Symmetrisch aufgebaute Sandwich-Platte mit GFK-Laminat -Deckschichten ($t=1$) und Schaumstoffkern ($t=10$ mm); $t_{ges}=12$ mm; 0° Faserrichtung parallel zur langen Kante ($Z1$)
- GFK-Laminat: $[0/ 45/ 90/ -45/ 0]$ mit jeweils $0,20$ mm ES-Dicke
- Schaumstoffkern: Rohacell R51

Stochastische Festigkeitseigenschaften und Lasten

Da FB und ZFB nur in den Schichten des GFK-Laminates betrachtet werden, ist lediglich ein stochastisches Modell für die Basis-Festigkeitswerte von GFK erforderlich. Die elastischen Eigen-

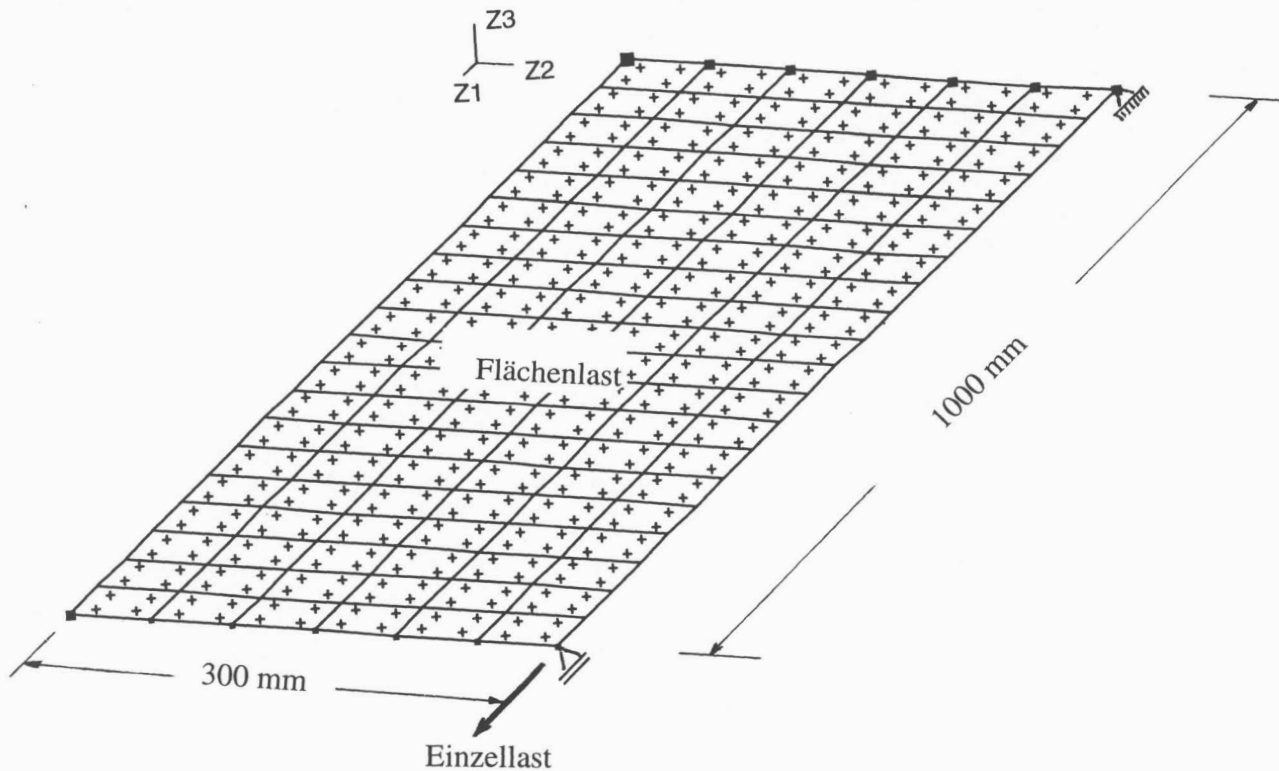


Bild 5/7: Plattenstreifen für Beispielrechnungen zur Strukturzuverlässigkeit

schaften sind für GFK und Schaum deterministische Größen aus der obigen Tabelle. Alle Angaben sind in Mpa; V steht für Variationskoeffizient; Last-M. steht für Lastfall-Multiplikator.

Variable	$R_{\perp z}$	$R_{\parallel \parallel}$	$R_{\perp d}$	$R_{\parallel z}$	$R_{\parallel d}$	n_{z1} (Last-M.)	surface (Last-M.)
Verteilung	Weibull	Weibull	Weibull	Weibull	Weibull	Normal	Normal
Mittelw.	45	65	145	1500	1300	0,40	1,0
Std.Abw.	5,85	5,85	10,15	60	104	0,04	0,10
V	13%	9%	7%	4%	8%	10%	10%

(Die Variationskoeffizienten V sind hier zum Teil höher, als die in *Tabelle 13/1* angegebenen. Die Datenbasis ist dort zu klein und außerdem liegt überdurchschnittliche Fertigungsgüte vor.

Im Vergleich zum vorigen Abschnitt ist das stochastische Modell für die Basis-Festigkeitsgrößen nahezu gleich. Zur Vereinfachung sind hier keine Korrelationen zwischen den unsicheren Variablen definiert. Dies macht es möglich, den Einfluß der Unsicherheiten grafisch mittels der "klassischen" α -Werte nach Gl.(5.8) darzustellen (siehe *Farbtafeln 5/3 und 5/4* im Anhang). Bei abhängigen Zufallsvariablen sind die α -Werte nur schwer interpretierbar.

Bruchkriterium

- Einfaches parabolisches Modell (entspricht Modell #1 in Kapitel 4), siehe (Gl.3.4) bis (3.5) oder Gl. (13.1) bis (13.7). Im vorliegenden Fall kann in sehr guter Näherung mit der analytischen Lösung für den ebenen Spannungszustand gerechnet werden, Gl.(13.11) bis (13.13).

- Der Steigungsparameter ist eine deterministische Größe, $p = p^z = 0,233$, es folgt $p^d = 0,750$. Mit $R_{\perp\perp}^M = 56,2$ ergeben sich die Steigungen $-m_{\perp\parallel} = 0,337$ und $-m_{\perp\perp} = 0,291$.
- Vergleichsrechnungen mit dem erweiterten Ausgangsmodell, siehe Gl.(13.14) bis 13.19), mit gleichen Steigungen m bzw. μ ergaben keine wesentlichen Unterschiede im Sicherheitsniveau oder in den Sensitivitäten.

Ergebnisse: Sicherheitsniveaus (Zuverlässigkeitsn.) gegen FB und ZFB über alle Schichten

Dargestellt in *Farbtafel 5/1* im Anhang sind Isolinien des Zuverlässigkeitsindex β für FB und ZFB, und zwar das minimale β über alle Schichten, wobei β an jeweils 4 Punkten im Element an der Unter- und Oberkante jeder Schicht berechnet wurde. Der Schaumkern wurde ausgeklammert. Die größte Beanspruchung und damit das größte P_f ist erwartungsgemäß im Bereich der Einzellast. In diesem Bereich ist ein ZFB in der Schicht 3 recht wahrscheinlich (siehe auch die *Farbtafel 5/2*), FB dagegen sehr unwahrscheinlich.

Die folgende Tabelle gibt den Zusammenhang zwischen dem Zuverlässigkeitsindex β und der Versagenswahrscheinlichkeit $P_f = \Phi(-\beta)$. Φ ist die standardisierte Normalverteilungsfunktion.

β	1	2	3	4	6	8
P_f	0,16	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-9}$	$6,3 \cdot 10^{-16}$

Ergebnisse: Zuverlässigkeitsniveau gegen ZFB an der Unterseite von Schicht 3

Die Schicht 3 liefert nahezu überall in der Struktur den kleinsten Zuverlässigkeitsindex β (*Farbtafel 5/2*). Dargestellt ist die Verteilung von β gegen ZFB an der Unterseite von Schicht 3 als Farb-Plot ('Intensity-Plot'). Die Schicht 3 hat eine 90° Orientierung (parallel zur kurzen Kante der Platte).

Ergebnisse: Einfluß der Unsicherheit in den Lasten bei ZFB

Der Einfluß der einzelnen unsicheren Variablen (*Farbtafel 5/3*) ist von Schicht zu Schicht unterschiedlich. Da die kleinsten Werte für den Zuverlässigkeitsindex β (bedeutet größte Versagenswahrscheinlichkeit) in der Schicht 3 auftreten, werden die Sensitivitäten α_i für die Oberflächenlast "surface" und die Einzellast "n_z1" in dieser Schicht als Isolinien dargestellt. Die α_i sind auf das Intervall $[-1, +1]$ normierte Größen, mit denen sich zusammen mit β Teilsicherheitsfaktoren errechnen lassen, siehe Gl.(5.8). Die Bereiche mit blauen Linien ($\alpha > 0$) am unteren Rand der Platte zeigen, daß sich lokal die Lasten auch positiv auf die Zuverlässigkeit auswirken können. Im größten Teil der Struktur wirken die Lasten natürlich ungünstig ($\alpha < 0$).

Ergebnisse: Einfluß der Unsicherheit in den Basis-Festigkeitsgrößen bei ZFB

Der Einfluß der Zugfestigkeit $R_{\perp}^z$ ist erwartungsgemäß (s. *Farbtafel 5/4*) fast im ganzen Bereich der Platte groß, $\alpha \approx +0,90$. Durch das von der Einzellast n_z1 hervorgerufene Biegemoment gibt es an der unteren Kante Druckspannungen und der Einfluß von $R_{\perp}^z$ geht auf nahezu Null. Umgekehrt spielen $R_{\perp}^d$ und $R_{\perp\parallel}$ nur in einem kleinen Bereich an der unteren Kante eine Rolle, sonst ist ihr Einfluß nahe Null.

6 ANFORDERUNGEN AN VERSUCHSTECHNIK, PROBEKÖRPER UND PRÜFVORRICHTUNGEN [DH, JK, LK]

Eine vollständige experimentelle Verifikation der Aussagen eines 3D ZFB-Festigkeitskriteriums hätte Versuche für alle möglichen Kombinationen der fünf ZFB verursachenden Spannungen σ_2 , σ_3 , τ_{23} , τ_{31} , τ_{21} zu umfassen. Dies ist aus vielerlei Gründen weder möglich noch nötig. Für die Verifikation eines Kriteriums ist es vielmehr wichtig zu überprüfen, ob die Physik stimmt, d.h., ob die Voraussagen an den entscheidenden Stellen des Bruchkörpers dem realen Versagensverhalten entsprechen. Sofern dies erfüllt ist, kann sicherlich davon ausgegangen werden, daß die Aussagen auch an den "unkritischen Stellen" zutreffen. Selbst unter Berücksichtigung dieser Einschränkung ist keines der heute gebräuchlichen Festigkeitskriterien für UD-Schichtverbunde hinreichend experimentell bestätigt worden. Dies mag seinen Grund darin haben, daß Bruchversuche unter zusammengesetzter Beanspruchung außerordentlich schwierig sind und bereits Experimente mit zwei kombiniert wirkenden Spannungen in der Regel über den Bereich der standardisierten Prüfungen hinaus gehen.

Der wesentliche Unterschied des hier betrachteten ZFB-Kriteriums zu anderen 3D-ZFB-Kriterien ist, daß der Bruchwinkel als wesentliche Bestimmungsgröße in die Bruchbedingung mit einbezogen wird. Ein entscheidender Hinweis für die Gültigkeit der den Modellvorstellungen zugrundeliegenden Hypothesen ist daher die Klärung der Frage, ob sich die theoretisch vorhergesagten Bruchwinkel θ_B auch experimentell bestätigen lassen. Neben Versuchen an den Z/D-T-Standardrohrprobekörpern zur Ermittlung der mehrachsigen Testdaten der Bruchkurve für den ebenen (σ_2, τ_{21}) -Spannungszustand waren deshalb vorrangig Versuche an Sonderprobekörpern zum Zwecke der Bruchwinkelbestimmung unter definierten Spannungszuständen durchzuführen. Die hierzu notwendige Entwicklung von Versuchstechniken, bei denen definierte Spannungszustände mit mehr als zwei ZFB verursachenden Spannungen auftreten, erscheint unrealistisch. Versuche mit einer Spannung oder zwei kombiniert wirkenden Spannungen können jedoch bereits die wesentlichen Besonderheiten des wirkebenebezogenen ZFB-Kriteriums belegen. Die Anforderungen bezüglich Werkstoffauswahl und Versuchstechnik sollen im folgenden definiert werden.

6.1 Definition der Testmatrix und der Lastpfade [LK]

Eine Vielzahl herkömmlicher und insbesondere neu konzipierter Versuchstechniken ist eingehend untersucht worden, um die für die Verifizierung des ZFB-Kriteriums am besten geeigneten Versuchsanordnungen auszuwählen. Im Vordergrund dieser Analyse standen dabei die Machbarkeitsuntersuchungen zum Einleiten definiert vorgegebener Spannungscombinationen in die Probekörper bzw. die Prüfschichten, wobei Störeffekte infolge Einspannbedingungen, freier Ränder und herstellungsbedingter Einflüsse (etwa durch Eigenspannungen, schräge Faserlage, Verformungshinderungen etc.) weitgehend zu vermeiden waren.

Die Versuchsmethoden nebst Probekörpern wurden aus Übersichtlichkeitsgründen in eine Versuchsmatrix eingeordnet, die wiederum mit dem Ziel entwickelt worden ist, daß die physikalische Plausibilität des ZFB-Kriteriums auch für komplex überlagerte Spannungszustände eindeutig nach-

gewiesen werden kann. Dazu zählt zum einen die Verbesserung des Festigkeitsnachweises gegenüber dem Nachweis mit herkömmlichen pauschalen Kriterien und zum anderen der Vorstoß in noch kaum untersuchte Bereiche des ZFB-Körpers für FKV. Hieraus lassen sich dann viele, teilweise unbekannte Bruchphänomene physikalisch deuten und wichten, womit eine deutliche Verbesserung der Schadensanalyse und -voraussage von FKV-Bauteilen erwartet wird.

Aus der Untersuchung und Bewertung verschiedenartiger Versuchstechniken resultiert eine Testmatrix gemäß Tab.6/1, in der die am besten geeigneten Versuchsarten zur Verifizierung des ZFB-Kriteriums zusammengefaßt sind. Hierbei werden die Prüfmethoden entsprechend den geforderten Spannungskombinationen geordnet. Die Vielfalt der Spannungskombinationen läßt sich selbstverständlich durch Änderung der Faserlagen in den Probekörpern erhöhen, was häufig jedoch aufgrund der Herstellungsrestriktionen mit erheblichen Problemen verbunden ist. Die Zuordnung der einzelnen Versuchskonzepte zu den jeweiligen Bruchkurven ist schematisch in Bild 6/1 dargestellt.

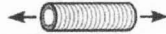
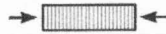
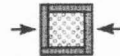
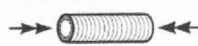
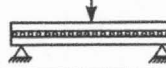
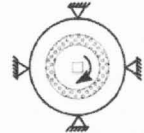
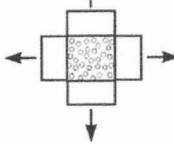
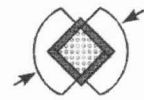
Die einzelnen Versuche sind zunächst rechnerischen Modellanalysen unterzogen und daraufhin modifiziert worden. Weitere Anpassungen der Versuchseinrichtungen und Probekörper erfolgten anhand der ersten Prüfergebnisse, wobei die hier gewonnenen Erkenntnisse auch zur Entwicklung neuer Versuchskonzepte beigetragen haben. Einige grundsätzliche Informationen zu den einzelnen Versuchskonzepten der Testmatrix werden in der Spalte Bemerkungen angegeben. Detaillierte Ausführungen zu den ausgewählten Versuchen und den hieraus resultierenden Testergebnissen sind den Kapiteln 7 usf. zu entnehmen. Alle mit Stern versehenen Versuche sind nicht angegangen worden und dienen lediglich dem Überblick. (Δ) bedeutet, daß bei den Z/D-T-Probekörpern ursprünglich nicht an eine Winkelmessung gedacht wurde.

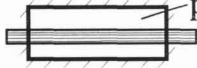
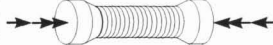
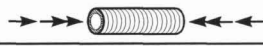
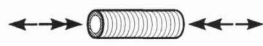
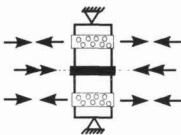
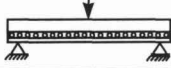
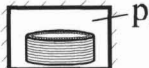
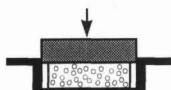
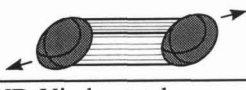
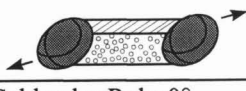
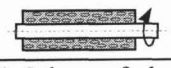
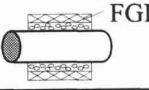
Wesentlich bei der Versuchsdurchführung und gleichzeitig auch Voraussetzung für die Vergleichbarkeit der Bruchwerte ist das "proportionale" Belasten bzw. die Einhaltung eines vorgegebenen Lastpfads. Nach Durchfahren der "Schädigungsbeginnkurve" stellt sich sonst eine Lastpfadabhängigkeit ein und der angestrebte Punkt der Bruchkurve wird nicht erreicht [Cho85].

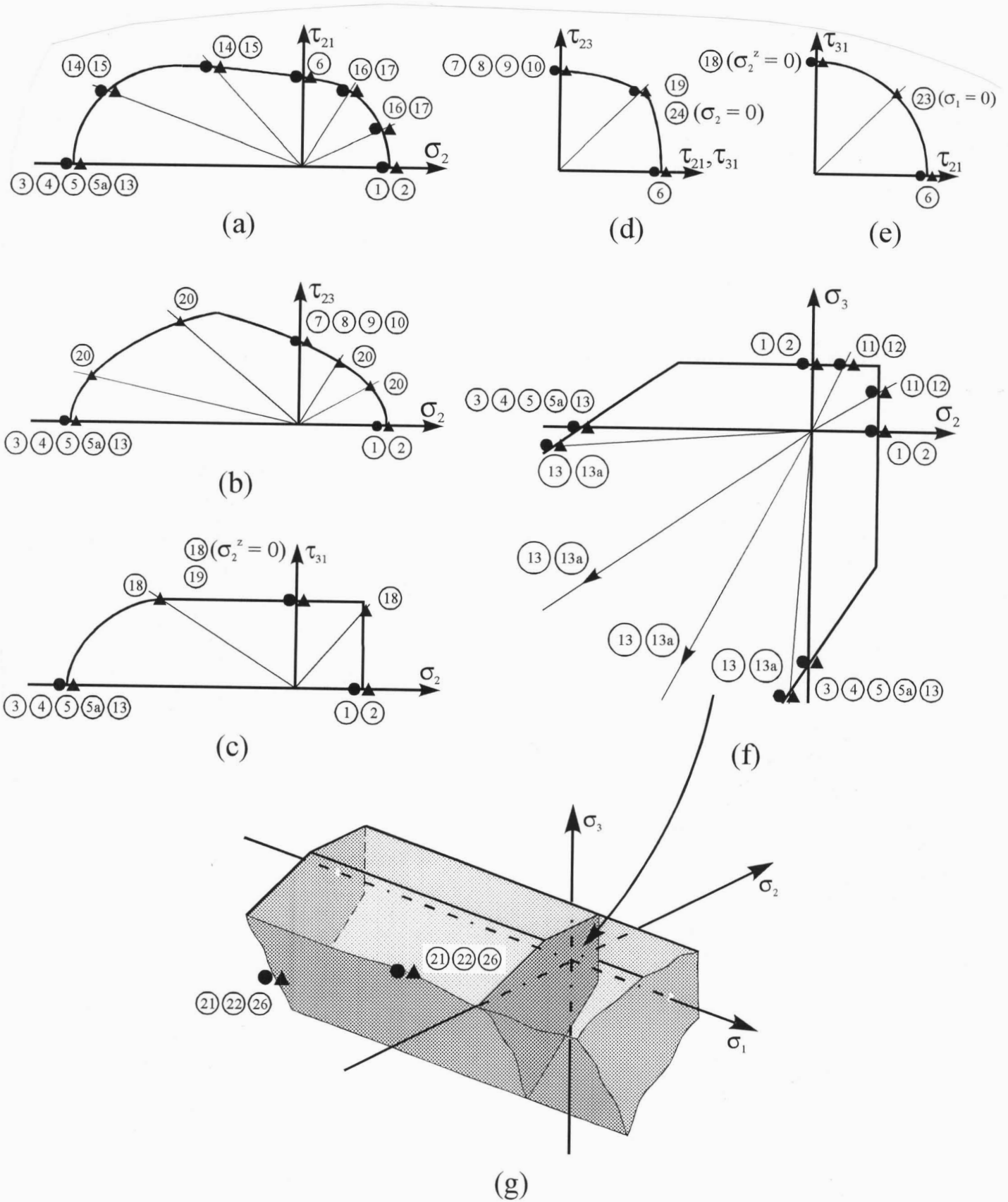
6.2 Auswahl der Werkstoffe und Werkstoffkennwerte

Das wirkebenebezogene ZFB-Kriterium geht von der Erfahrung aus, daß der Faserkunststoffverbund - auf den es angewendet wird - sprödes Bruchverhalten zeigt. Dies kann in guter Näherung für alle aus unidirektionalen Einzelschichten aufgebauten SV vorausgesetzt werden, unabhängig davon, ob die Fasern in duromeren oder thermoplastischen Matrixmaterialien eingebettet sind.

Die experimentellen Untersuchungen sollten an einem besonders geeigneten Werkstoff durchgeführt werden, der den vorausgesetzten Spröbruchcharakter über einen großen Einsatzbereich aufweist. Bei der Wahl des duromeren Matrixmaterials bietet sich die Verwendung von Polymerisationsharzen, wie es beispielsweise ungesättigte Polyesterharze (UP) und Vinylesterharze (VE) sind, oder Polyadditions-/Polykondensationsharzen an, zu denen Epoxid- (EP) und Phenolharze zählen.

	Spannungszustand		Bezeichnung Probekörper	Hauptmeßwert ● Bruchspannung ▲ Bruchwinkel
EINDIMENSIONAL	$(0, \sigma_2^z, 0, 0, 0, 0)$	1	90°-UD-Rohr 	● ▲
		2)	90°-UD-Flachprobe 	● (▲)
	$(0, \sigma_2^d, 0, 0, 0, 0)$	3	90°-UD-Rohr 	● ▲
		4)	90°-UD-Flachprobe 	●
		5	UD-Prisma 	▲
		5a	Doppel-T-Probe 	▲
	$(0, 0, 0, 0, 0, \tau_{21})$	6	90°-UD-Rohr 	● ▲
	$(0, 0, 0, \tau_{23}, 0, 0)$	7)	UD-Scheibe 	● ▲
		8	Schubquader 	● ▲
		9	gerader Biegebalken 	▲
		10	Klebrohr 0° 	▲
ZWEIDIMENSIONAL	$(0, \sigma_2^z, \sigma_3^z, 0, 0, 0)$	11	gekrümmter Biegebalken 	● ▲
		12)	Kreuzkörper 	● ▲
	$(0, \sigma_2^d, \sigma_3^d, 0, 0, 0)$	13	UD-Prisma 	● ▲

ZWEIDIMENSIONAL	$(\approx 0, \sigma_2^d, \sigma_3^d, 0, 0, 0)$	13a)	0°-UD-Stab bzw. Rohr 	● ▲	Innenüberdruck von über 10.000 bar angestrebt, Hochdruckprüfkammer
	$(0, \sigma_2^d, 0, 0, 0, \tau_{21})$	14	kerngestütztes Rohr 	▲	Einanderdrücken der Bruchflächen ist zu vermeiden, Stützkerneigenschaften vorausberechnen
		15	90°-UD-Rohr 	● (▲)	entsprechend 1, 3 Laststrahlen
	$(0, \sigma_2^z, 0, 0, 0, \tau_{21})$	16 17	90°-UD-Rohr 	● ▲	siehe 1; 3 Laststrahlen, t = 3 mm, 1 Laststrahl, Bruchwinkel-messung
	$(0, \sigma_2, 0, 0, \tau_{31}, 0)$	18)	Klebrohr 90° 	▲	Einleitung zusätzlicher σ_2 Spannung problematisch
	$(0, 0, 0, \tau_{23}, \tau_{31}, 0)$	19	Klebrohr $\neq 0^\circ$ 	● ▲	Anisotropieeigenschaften führen zu gekoppeltem Schubverhalten
	$(0, \sigma_2, 0, \tau_{23}, 0, 0)$	20	gerader Biegebalken 	▲	Querkontraktionszahlen der Trag- und Prüfschicht anpassen
DREIDIMENSIONAL	$(\sigma_1^d, \sigma_2^d, \sigma_3^d, 0, 0, 0)$	21	90° UD-Ring 	● ▲	Erzeugung sehr hoher Drücke notwendig, $p_i \geq 10.000$ bar
		22	UD-Würfel 	●	Reibungskräfte möglichst klein halten, Nutgröße ist von der Lastkombination abhängig
	$(\sigma_1^z, 0, 0, 0, \tau_{31}, \tau_{21})$	23)	UD-Vierkantstab 	▲	3D-Bruchmechanik Vorrichtung, $\alpha = 0^\circ$
	$(0, \sigma_2^z, 0, \tau_{23}, 0, \tau_{21})$	24)	UD-Vierkantstab 	▲	analog 22, $\alpha = 90^\circ$
	$(0, \sigma_2^z, \sigma_3^z, \tau_{23}, 0, 0)$	25)	Schleuder-Rohr 0° 	●	Einspannung an der Innenmantelfläche, $\omega \neq \text{const.}$, $\dot{\omega} \sim \tau_{23}$
	$(\sigma_1^z, \sigma_2^z, \sigma_3^z, \tau_{23}, \tau_{31}, 0)$	25a)	Schleuder-Rohr $\neq 0^\circ$ 	●	analog 24, $\dot{\omega} \sim \tau_{23}, \tau_{31}; \sigma_1 \ll R_1^z$
	$(\sigma_1^d, \sigma_2^d, \sigma_3^d, 0, 0, ?)$	26)	SMA-Schrumpfrohr FGL 	● ▲	FGL: Form-Gedächtnis-Legierung



*Bild 6/1: Schematische Zuordnung der ausgewählten Versuchskonzepte.
(X) Versuchsbezeichnung laut Tab.6/1)*

Aufgrund der deutlich besseren mechanischen Eigenschaften und höheren Wärmeformbeständigkeit der EP-Harze im Vergleich zu UP- und VE-Harzen, sollte ein EP-Harzsystem für die experimentellen Untersuchungen verwendet werden; zudem ist das in diesem Projekt untersuchte ZFB-Kriterium generell für die Festigkeitsanalyse technologisch anspruchsvoller Hochleistungsfaserverbundbauteile entwickelt worden, für welche EP-Harze heute die weitaus größte Anwendung finden. Im Speziellen wurde das Epoxidharzsystem LY556/HY917/DY070 für die Versuche bevorzugt, da für dieses im wissenschaftlichen Bereich die meisten Erfahrungswerte vorliegen.

Als Verstärkungsmaterialien von FKV-Bauteilen werden in der Regel anorganische Glasfasern oder organische Kohlenstoff- bzw. Aramidfasern verwendet. Die Kohlenstofffaser ist unter den Verstärkungsfasern für Hochleistungsverbundwerkstoffe die herausragendste, wegen der Kombination von technologisch bedeutenden Eigenschaften wie hoher Festigkeit und hoher Steifigkeit bei vergleichsweise niedrigem spezifischen Gewicht und geringem negativen Wärmeausdehnungskoeffizienten. Aufgrund der Transluzenz von UD-GFK, welche eine Bruchwinkelbewertung vereinfacht, und des beträchtlichen Erfahrungspotentials bei der Untersuchung des Versagensverhaltens unter ebenen (σ_2 , τ_{21})-Beanspruchungen wurde jedoch eine E-Glasfaser-Verstärkung vorgezogen. Eine Übertragbarkeit auf CFK wird anhand einiger signifikanter Spannungszustände aufgezeigt.

Eine der wichtigsten Anforderungen an die Probekörper stellt die makroskopisch homogene Spannungsverteilung im Prüfbereich dar. Diese ist nicht nur von den Geometrieparametern der Prüfschicht abhängig, sondern auch in hohem Maße von der Qualität des Faserverbundwerkstoffs. Qualitätsmerkmale sind:

- hoher und konstanter Faservolumengehalt um 60%
- homogene Faserverteilung ohne Faseranhäufungen
- geringer Fehlstellen- und Luftporengehalt.

Mit den zur Verfügung stehenden Fertigungseinrichtungen für UD-FKV können im Faserwickelverfahren die besten und mit dem Prepreg/Autoklav-Verfahren ebenfalls hervorragende Qualitäten erreicht werden [Kru96]. Während das Faserwickelverfahren zur Herstellung von UD-FKV mit stark gekrümmter Geometrie geeignet ist, können im Prepreg/Autoklav-Verfahren vorwiegend ebene und leicht gekrümmte Geometrien realisiert werden. Mittels spezieller Vorrichtungen können allerdings auch die jeweils für beide Verfahren ungeeigneteren Geometrien realisiert werden. Auf die Probekörperfertigung wird in Kapitel 6.4 noch näher eingegangen.

Die Annahme des Sprödbbruchcharakters bei ZFB für die ausgewählte Werkstoffkombination wurde anhand einachsiger Druckversuche quer zur Faserrichtung mit der sehr geringen Dehngeschwindigkeit von 0,05 %/min belegt. Der so beanspruchte Probekörper erlitt einen "schrägen" ZFB innerhalb zweier Bilder einer mit der Frequenz von 200 Bildern/s arbeitenden Hochgeschwindigkeitskamera, so daß sich der spröde Bruch innerhalb einer 1/5000 s über dem gesamten Prüfquerschnitt ausgebildet haben muß (*Bild 6/2*).

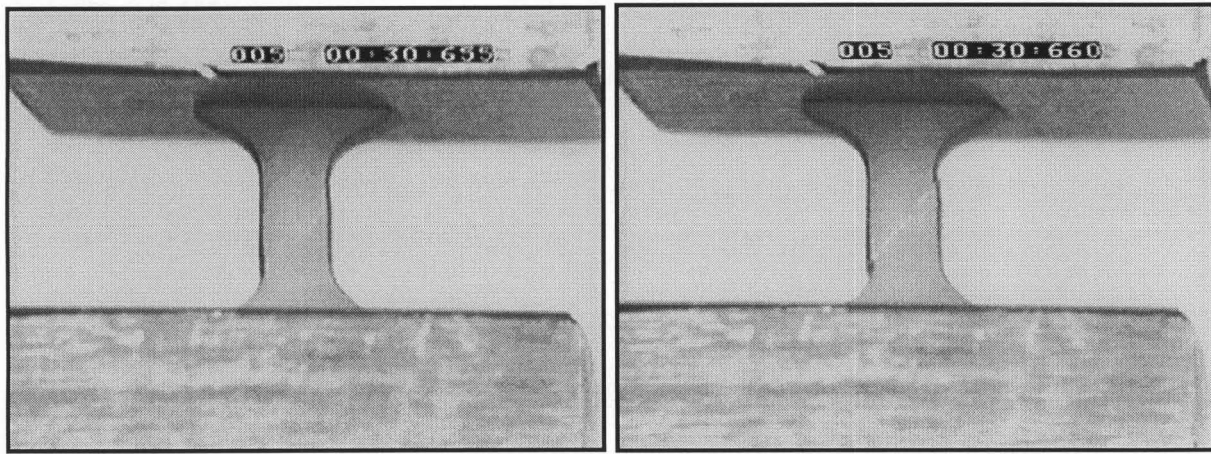


Bild 6/2: Sprödbbruch eines GFK-Probekörpers unter einachsigem Querdruck

Werkstoffkennwerte:

Die elastischen Grundeigenschaften für UD-GFK sind als Richtwerte in *Tab. 6/2* angegeben. Bezüglich der Festigkeitsparameter erfordert das wirkebenebezogene Koordinatensystem, in der in Kap. 2 eingeführten Form, ein Umdenken beim Anpassen der Bruchbedingungen an den jeweiligen Werkstoff. Das neue ZFB-Festigkeitskriterium setzt voraus, daß die Bruchgefahr von den gemeinsam auf einer Wirkebene auftretenden Spannungen σ_n , τ_{nt} , τ_{nl} ausgeht. Konsequenterweise müssen diese Spannungen auch zu den Festigkeitseigenschaften dieser Wirkebene in Beziehung gesetzt werden und nicht, wie bei den traditionellen Festigkeitskriterien, zu den Basisfestigkeiten $R_{\perp}^z$, $R_{\perp}^d$, $R_{\parallel}$ der UD-Schicht.

Nach [Puc96a] sind die Bruchwiderstände der Wirkebene folgendermaßen definiert:

Der Bruchwiderstand der Wirkebene ist derjenige Widerstand, den eine Schnittebene ihrem Bruch infolge einer einzelnen auf ihr wirkenden Beanspruchung (σ_n , τ_{nt} oder τ_{nl}) entgegensetzt.

Aus dieser Definition resultieren die drei Bruchwiderstände (siehe hierzu Gl. 1.27 und Gl. 1.28) $R_{\perp}^{zA}$ gegen ZFB durch eine allein in der Schnittebene wirkende $\sigma_{\perp}^z$ -Beanspruchung, $R_{\perp\perp}^A$ gegen ZFB durch eine allein in ihr wirkende $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung und $R_{\perp\parallel}^A$ gegen ZFB durch eine allein in ihr wirkende $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung. Bei dem in UD-FKV vorliegenden Werkstoffverhalten zeigte sich, daß die Bruchwiderstände der Wirkebene $R_{\perp}^{zA}$ und $R_{\perp\parallel}^A$ durch die Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^z$ bzw. die Quer/Längs-Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ ersetzt werden können, da $\sigma_{\perp}^z$ - bzw. $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung zu einem Bruch in ihrer Wirkebene führen (*Bild 6/3*). Damit können diese Bruchwiderstände mittels einer einfachen Querkzug- bzw. Torsionsprüfung an rohrförmigen Probekörpern ermittelt werden. In vorangegangenen Arbeiten durchgeführte Untersuchungen an GFK [Kna72, Schü89], hatten für die Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^z$ -Werte von etwa 60 MPa (N/mm²) und für die Quer/Längs-Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ Werte von etwa 80 MPa ergeben. Der Bruchwiderstand $R_{\perp\perp}^A$ kann im Gegensatz dazu nicht durch die Quer/Quer-Schubfestigkeit $R_{\perp\perp}$ ersetzt werden, da eine $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung nicht zu einem Bruch in ihrer Wirkebene führt, sondern auf einer gegenüber der Wirkebene geneigten Schnittebene (*Bild 6/3*).

Bei einem - hier nicht betrachteten - duktilen Werkstoff ist hingegen $\max \tau_{\perp\perp} = R_{\perp\perp}^A = R_{\perp\perp}$ meßbar und wird Kohäsion genannt.

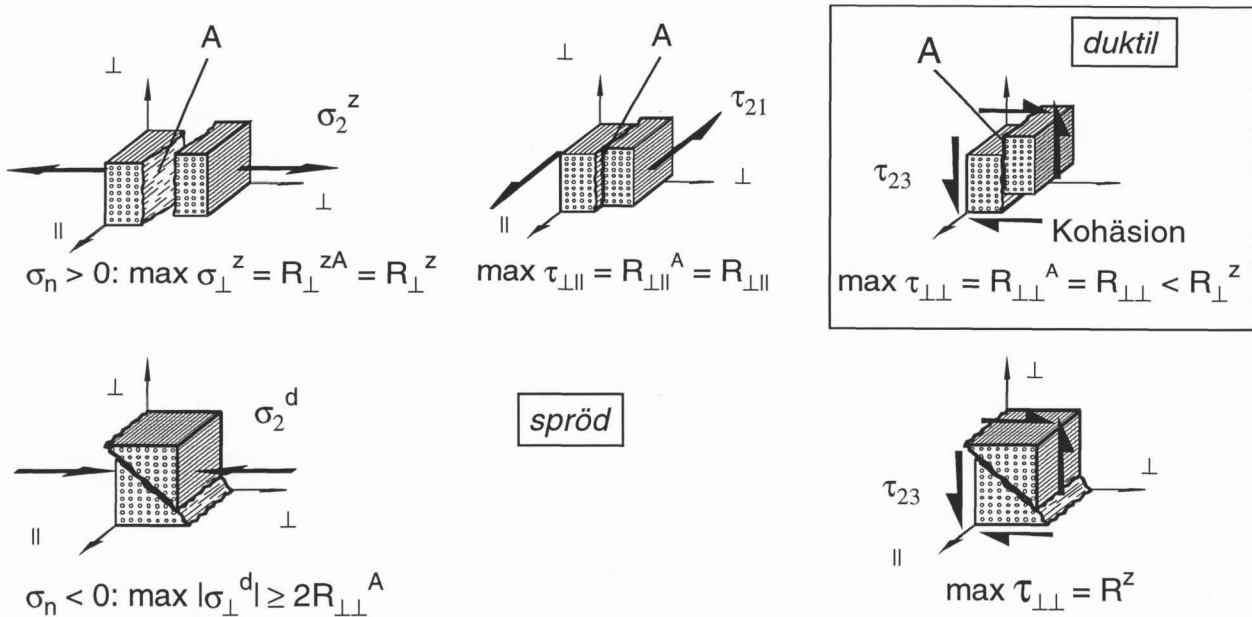


Bild 6/3: Wirkebene-Bruchwiderstände (A kennzeichnet die Wirkebene)

Wie in Kapitel 3 erläutert, kann der gesuchte Bruchwiderstand jedoch modellzugehörig mittels der Querdruckfestigkeit $R_{\perp}^d$ berechnet werden. In den oben genannten Untersuchungen wird die Querdruckfestigkeit $R_{\perp}^d$ zu etwa 140 MPa bestimmt. $R_{\perp||}^A$ kann damit zu etwa 60 MPa abgeschätzt werden.

Weitere zur Spannungsanalyse benötigte Werkstoffkennwerte können der Literatur entnommen werden [Mic95]. In Tabelle 6/2 sind die wichtigsten Werkstoffwerte des für die Untersuchungen bevorzugten GFK als *Standard-Datensatz* zusammengefaßt (Mittelwerte). Diese für die meisten Rechnungen herangezogenen Orientierungswerte basieren im wesentlichen auf Meßwerten von [Kna72]. Wurden andere Werte angesetzt, so ist dies vermerkt.

Tabelle 6/2: Werkstoffkennwerte von UD-GFK mit $v_f = 60\%$ (GFK-Standarddatensatz)

Elastische Eigenschaften	Anhaltswerte	Festigkeiten	Anhaltswerte
$\bar{E}_{ }$	44500 MPa	$\bar{R}_{ }^z$	1300 MPa
$\bar{E}_{\perp}$	12500 MPa	$\bar{R}_{ }^d$	800 MPa
$\bar{G}_{\perp }$	6000 MPa	$\bar{R}_{\perp}^z$	60 MPa
$(\bar{G}_{\perp\perp})$	4450 MPa	$\bar{R}_{\perp}^d$	144 MPa
$\bar{\nu}_{\perp }$	0,28	$\bar{R}_{\perp }$	61 MPa
$\bar{\nu}_{\perp\perp}$	0,4	$(\bar{R}_{\perp\perp}^A)$	(≈ 60 MPa)
$\bar{\alpha}_{T } / \bar{\alpha}_{T\perp}$	$5,7 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1} / 45 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$	$(\alpha_{M } = 0) \quad \alpha_{M\perp}$	$4 \cdot 10^{-3} \%$ Feuchteänderung

6.3 Auswahl von Probekörpern

Eine wesentliche Anforderung bei der Entwicklung neuer Versuche ist die Erzielung eines homogenen Spannungszustands im Probekörper. Nur wenn der Spannungszustand in der UD-Prüfschicht bzw. Prüfzone des Probekörpers an jeder Stelle derselbe ist, ist der vermessene Bruchwinkel für die Verifikation des ZFB-Kriteriums aussagekräftig. Da diese Anforderung nur selten zu erfüllen ist, wurde sie dahingehend eingeschränkt, daß die Probekörper so zu gestalten sind, daß die mit dem ZFB-Kriterium nach Kap. 3 berechnete Anstrengung A innerhalb der Prüfschicht oder Prüfzone um nicht mehr als max. 5% abweichen sollte. Eine Prüfschicht in der hier gewählten Definition ist in einen Probekörper eingebettet, der insgesamt einen Verbund aus mehreren Teilen darstellt. Die Prüfzone wird hingegen durch mechanische Bearbeitung aus einem UD-FKV gewonnen.

Wenn in dieser Arbeit von einem homogenen Spannungszustand gesprochen wird, so bezieht sich dies generell auf Spannungszustände auf makromechanischem Niveau, d.h., der Spannungszustand wird berechnet, indem über Fasern und Matrixquerschnitte gemittelt wird.

Neben der Anforderung bezüglich einer möglichst optimalen Spannungshomogenität in Prüfzone bzw. -schicht, mußte bei der Auslegung eines Probekörpers auch einem möglichen Fehlstellengehalt Rechnung getragen werden. Auf Erfahrungen beruhend wurde daher eine Mindestdicke für Prüfschichten von 2 mm und die kleinste Länge im Querschnitt einer Prüfzone mit 5 mm festgelegt, um den Einfluß von Fehlstellen auf die Ausbildung des Bruchwinkels vernachlässigen zu können. Für diese Abmessungen wird erwartet, daß eine ausreichende hohe Werkstoffhomogenität erzielt werden kann. In diesem Zusammenhang sollte nicht unerwähnt bleiben, daß der sich einstellende Spannungszustand in der Prüfzone bzw. -schicht nicht nur homogen, sondern auch berechenbar sein muß. Für die Untersuchungen der Bruchwinkels ist allerdings nur die Kenntnis der Verhältnisse der wirkenden Spannungen relevant.

Besondere Beachtung bei der Entwicklung der Probekörper ist den sog. Krafteinleitungsbereichen zu widmen. Damit der zu untersuchende ZFB in der Prüfschicht oder Prüfzone auftritt, sind sie so zu gestalten, daß die Anstrengung A im Bereich der Krafteinleitungen deutlich niedriger ist. Es muß dann für einen sehr sanften Anstieg der Anstrengung zur Prüfzone hin bzw. eine störspannungsfreie Krafteinleitung in die Prüfschicht gesorgt werden. Diese Problematik ist sehr anschaulich bei den später beschriebenen Querdruckversuchen an UD-Prismen und den Schubversuchen an den Torsionsringen nachzuvollziehen.

6.3.1 Bekannte Versuchstechnik zur Verifikation von Festigkeitskriterien

Die Versuchstechnik zur Verifikation von Festigkeitskriterien für UD-ES ist bereits Ende der sechziger, Anfang der siebziger Jahre entwickelt worden. Seitdem hat praktisch keine Weiterentwicklung mehr stattgefunden. In einer zusammenfassenden Arbeit von *Tarnopol'skii* [Tar81] sind die bekannten Versuche zur Ermittlung der Basisfestigkeiten zusammengestellt und sehr detailliert beschrieben worden (*Bild 6/4*).

Die Bestimmung der Basisfestigkeiten stellt - wie schon erwähnt - den Mindestaufwand dar, um ein Festigkeitskriterium, das ja die Interaktion mehrerer Spannungen beschreibt, überhaupt an einen Werkstoff anzupassen. Möchte man ein Festigkeitskriterium zumindest für ebene (σ_1 , σ_2 , τ_{21})-Spannungszustände verifizieren, so sind Versuche notwendig, die verschiedene Kombinationen dieser Spannungen erzeugen können. Hierzu sind in der Vergangenheit im wesentlichen zwei verschiedene Probekörpergeometrien verwendet worden, der Rohr- und der Off-axis-Probekörper.

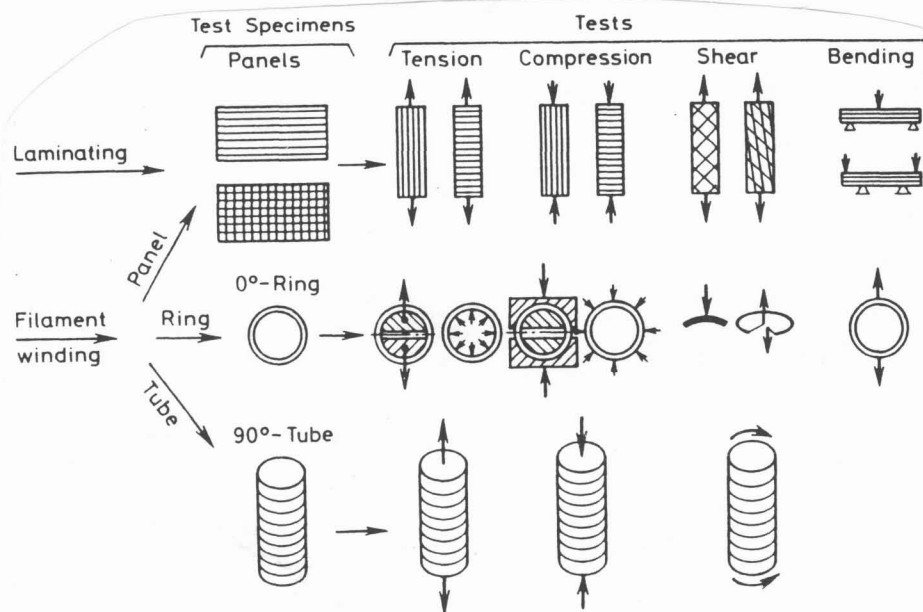


Bild 6/4: Versuchstechniken für verschiedenartige Probekörper [Tar81; Fig. 1.4.1]

Viele Experten sind der Meinung, daß der am besten geeignete Probekörper zur Realisierung homogener, ebener Spannungszustände in UD-FKV ein dünnwandiger zylindrischer Probekörper ist, der im Faserwickelverfahren hergestellt wird (vgl. Kap. 7). Mit Hilfe eines umfangsgewickelten Probekörpers, der mit verschiedenen Kombinationen axialer Zug- oder Druckbelastung und Torsionsbelastung beansprucht wird, die durch Innen- oder Außendruck zur Erzeugung der Spannung σ_1 noch erweitert werden kann, können im Prinzip alle ebenen Spannungszustände von UD-FKV experimentell realisiert werden [Huy96].

Von *Prosatov/Kopnov* [Pro65] wurde 1965 erstmalig an umfangsgewickelten zylindrischen Probekörpern das Verhalten von GFK unter verschiedenen ebenen Spannungszuständen untersucht, die durch verschiedene Kombinationen von Innen-/Außendruck, axialer Zug-/Druckbelastung und Torsionsbelastung erzeugt wurden. In [Puc68, Kna72, Sch75] wurden Versuche an umfangsgewickelten zylindrischen Probekörpern unter kombinierter Axialzug- und Torsionsbelastung durchgeführt, um die Interaktion von Quer-Zug- und Quer/Längs-Schubspannung in UD-GFK zu untersuchen. *Knappe/Schneider* [Kna72] erweiterten die Untersuchungen auf mit Axialdruck kombinierter Torsionsbelastung und führten erstmalig auch Langzeitversuche durch.

Dem entgegen steht der sog. Off-Axis-Probekörper, ein Zugstab aus UD-FKV mit von der Belastungsrichtung abweichender Faserorientierung. Dieser Probekörper ist leichter herstellbar und einfacher in der Versuchsdurchführung bei Zugbeanspruchung handhabbar, wobei allerdings eine größere Fehleranfälligkeit und mehr Störeffekte (ungewollte Biegespannungen oder Wölbeffekte) in Kauf genommen werden müssen als bei zylindrischen Probekörpern. Zudem ist die Off-Axis-Probe bei Druckbelastung aufgrund der dann noch hinzukommenden Beultendenz sehr problematisch. Dennoch wurden mit dem Off-Axis-Probekörper zahlreiche Untersuchungen durchgeführt [Pag68, Pip73, Has73, Cha77].

Alle anderen bestehenden Versuche sind nach [Fou85, Che93] nicht geeignet, ausreichend homogene Spannungszustände in UD-FKV zu realisieren. Damit sind die Anforderungen für die Verifikation des ZFB-Kriteriums z.Z. nur von dem umfangsgewickelten Rohrprobekörper zu erfüllen, der mit Hilfe einer Zug/Druck-Torsions-Prüfmaschine (σ_2, τ_{21})-Spannungszustände ermöglicht. Die Ermittlung des Bruchwinkels ist bei dieser Versuchstechnik nur für den trivialen Fall $\sigma_2 > 0$ möglich, da die Bruchflächen bei $\sigma_2 < 0$ teilweise zerstört werden. Für alle anderen Spannungszustände sind neue Versuchstechniken zu entwickeln. Mögliche Ansätze hierzu sind im folgenden Kapitel dargestellt.

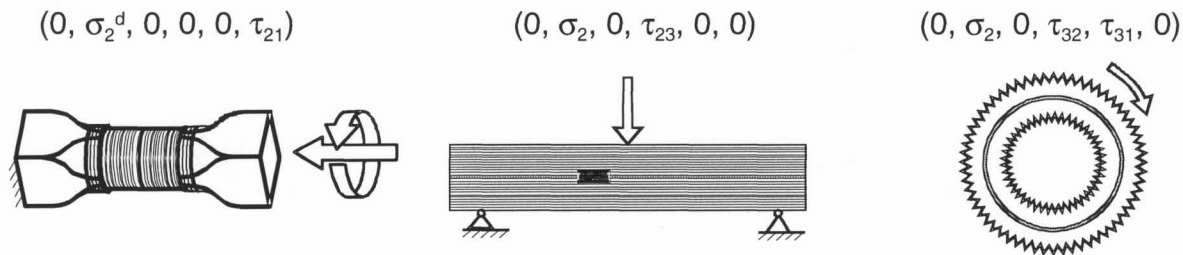
6.3.2 Konzepte zur Untersuchung von Bruchwinkeln

Es ist nicht bekannt, ob sich vor Beginn der hier beschriebenen Untersuchungen noch andere Autoren bei FKV explizit mit der Untersuchung von Bruchwinkeln beschäftigt haben. Lediglich von Brüchen unter einem Winkel $\theta_B = 0^\circ$ aufgrund von Quer-Zugspannung sind zahlreiche Schliffbilder vorhanden [Puc67, Gäd92, Nai94]. Die Autoren *Skudra* [Sku77] und *Swanson* [Swa87] haben schräge Brüche aufgrund von Quer-Druckspannungen an flachen bzw. rohrförmigen Probekörpern beobachtet. *Skudra* beobachtete Bruchwinkel von GFK und CFK unter Quer-Druckbeanspruchung von etwa 60° und wendete darauf die Mohrsche Theorie an. *Swanson* schätzt den Bruchwinkel bei ZFB aufgrund hoher Quer-Druckspannungen kombiniert mit geringen Quer/Längs-Schubspannungen zu etwa 45° ab.

Sollen Bruchwinkel unter zusammengesetzten Spannungszuständen ausgewertet werden, so kann auf verschiedene Ansätze zurückgegriffen werden. Die augenscheinlich einfachste Möglichkeit stellt die Ausnutzung eines Differenzwinkels der im Probekörper vorherrschenden Faserorientierung zur Belastungsrichtung dar, wie es beispielsweise beim Off-Axis-Probekörper und bei Boehler [Boe85] realisiert wird. Eine andere Möglichkeit bietet die Verwendung von Prüfmaschinen mit zwei Belastungsachsen. Als Beispiele können hier die bereits erwähnte Z/D-T-Prüfmaschine oder auch biaxiale Zug/Druck-Prüfmaschinen mit zwei zueinander senkrecht angeordneten Belastungsrichtungen angeführt werden. Neben diesen auf der Hand liegenden Ansätzen kann auch durch Positionierung einer Prüfschicht in einem Probekörper mit über dem Querschnitt veränderlichem Spannungszustand eine gewünschte Spannungs Kombination eingestellt werden. Leicht vorstellbar ist dies bei einem Drei-Punkt-Verbundbiegebalken, bei dem die Kombination aus Normal- und

mal- und Schubspannung sowohl von der Dicken- als auch von der Längenkoordinate abhängig ist. Basierend auf diesen Ansätzen wurden von Puck drei Versuche für jeweils zwei kombiniert wirkende Spannungen vorgeschlagen, die in ihrem Größenverhältnis variiert werden können (*Bild 6/5*):

Kombinierte Spannungszustände:



Realisierung durch Variation der

- der Lasten
- der Position der Prüfschicht
- der Faserorientierung

Bild 6/5: Probekörper zur Erzeugung verschiedener Spannungszustände

Um die Festigkeit gegen kombiniert wirkende σ_2 - und τ_{21} - Spannungen zu ermitteln, wurden schon in früheren Arbeiten die rohrförmigen, umfangsgewickelten Probekörper verwendet und in einer speziell entwickelten sog. Zug/Druck-Torsionsmaschine untersucht /Schü89/. In Hinblick auf die Verifikation der ZFB-Kriterien sind insbesondere die sich unter kombinierter Druck- und Torsionsbeanspruchung einstellenden Bruchwinkel interessant. Problematisch ist hierbei, daß die Bruchfläche bei dieser Beanspruchung durch die vor Eintreten des ZFB bereits im Probekörper gespeicherte und sich beim Bruch entladende elastische Verformungsenergie beschädigt wird und deshalb der Bruchwinkel u.U. nicht mehr vermessen werden kann. Um die Beschädigung des Bruchbereichs zu verhindern, wird ein im Vergleich zur Prüfschicht sehr steifer Kern verwendet, der bis zum Eintreten des ZFB in der Prüfschicht selbst nicht geschädigt wird und die durch den Bruch der Prüfschicht freiwerdende elastische Verformungsenergie bei einer nur ganz geringen Deformation aufnehmen kann. Verschiedene Kombinationen von σ_2 und τ_{21} können durch direkte Veränderung der Maschinenparameter zur Einstellung des Lastverhältnisses erzielt werden.

Der schon angesprochene Drei-Punkt-Biegeversuch sollte für eine erfolgversprechende Bruchwinkelbewertung den folgenden Verbundaufbau aufweisen: In einen in Längsrichtung wiederum sehr steifen Probekörper wird eine schwache, d.h. eine bei bereits relativ geringer Beanspruchung ZFB-erleidende Prüfschicht mit einer Faserorientierung in Breitenrichtung angeordnet. Verschiedene Kombinationen von σ_2 und τ_{23} können durch verschiedene Positionen der Prüfschicht innerhalb der Dicke des Drei-Punkt-Biegebalkens erreicht werden. Durch eine Transformation des (σ_2, τ_{23}) -Spannungszustands in den $(\sigma_{II}, \sigma_{III})$ -Hauptspannungszustand können zudem die Aussagen des Kriteriums für eine andere Darstellung der Bruchkurve analysiert werden.

Zur Untersuchung des (σ_2, σ_3) -Spannungsraums, der im Hinblick auf eine Verifikation der Modellvorstellungen von großem Interesse ist, wurden drei weitere Versuchskonzepte angedacht. Von der Idee des geraden Verbundbalkens ausgehend, kann durch die "Umlenkkraft" eines stark ge-

krümmten Balkens eine zweite Quer-Zugspannung σ_3^z erzeugt werden. Durch geschickte Anordnung einer axialen Prüfschicht im sonst umfangsgewickelten Ring-Biegebalken, sollte durch diesen Prüfkörper das "Entweder-Oder-Bruchverhalten" im zweiten (respektive vierten) Quadranten untersucht werden (*Bild 6/6*). Aussagen über die laut Bruchkriterium im dritten Quadranten nicht geschlossene Bruchkurve wurden durch zwei verschiedene Konzepte zur Erzeugung eines biaxialen Druckzustands sowie durch die angesprochenen hydrostatischen Versuche in einer Hochdruckkammer erhofft.

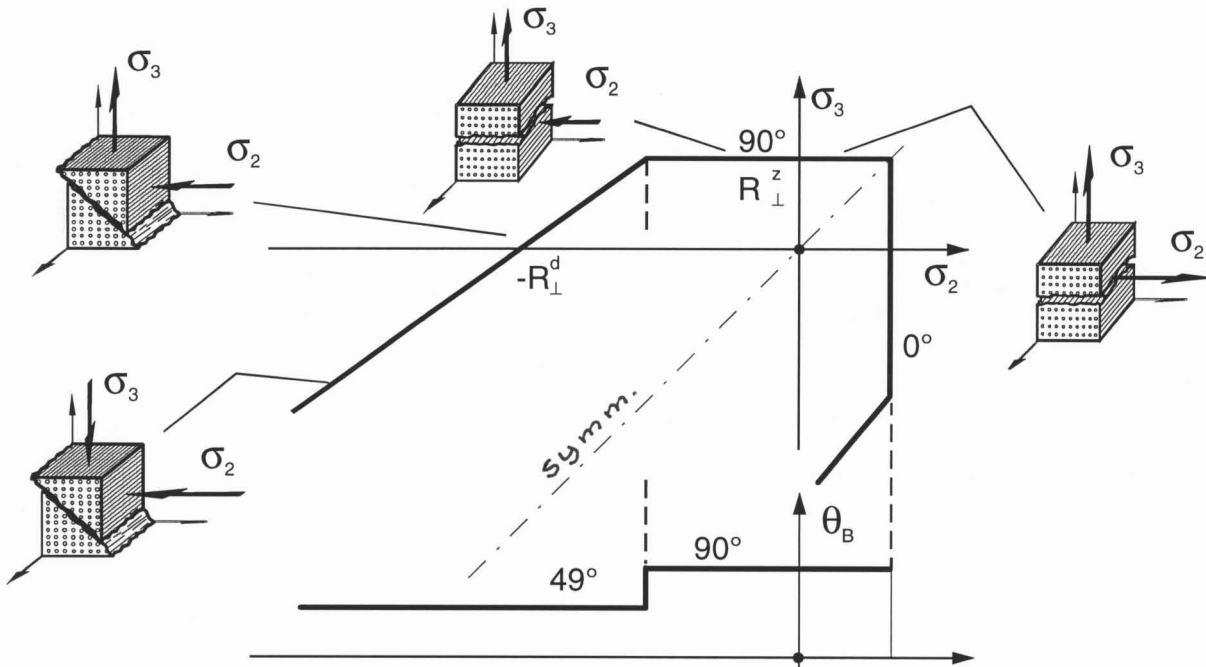


Bild 6/6: (σ_2, σ_3)-Bruchkurve (Beispiel)

Beim sog. Torsionsring-Probekörper wird zur Erzielung unterschiedlicher Spannungsverhältnisse τ_{32}/τ_{31} der Differenzwinkel von Faserorientierung zur Belastungsrichtung herangezogen. Mit einer scheibenförmigen Anordnung, die mit einem Torsionsmoment beansprucht wird, können die verschiedenen Kombinationen von τ_{32} und τ_{31} in der zwischen zwei Ringen angeordneten Prüfschicht (*Bild 6/5*) durch die Variation des Faserorientierungswinkels realisiert werden.

Neben diesen Versuchen mit zwei kombiniert wirkenden Spannungen sind natürlich auch die sich als Grenzfälle der oben beschriebenen Konzepte ergebenden Versuche mit nur einer Spannung wenigstens als Kontrolle und Informationszuwachs interessant. Beispielsweise kann eine reine τ_{32} -Spannung im geraden Biegebalken durch Anordnung der Prüfschicht in der neutralen Ebene oder im Torsionsring bei einer Faserorientierung in axialer Richtung erreicht werden. Eine alleinig wirkende τ_{21} -Spannung (identisch τ_{31}) kann mit dem nur torsionsbeanspruchten Z/D-T-Probekörper erreicht werden aber auch durch Torsionsringversuche mit Faserorientierung in Umfangsrichtung.

6.4 Probekörperfertigung

In Kap. 6.1 wurde bereits kurz angesprochen, daß die geforderten Qualitätsmerkmale zur Erzeugung eines makroskopisch homogenen Spannungszustands am besten im Faserwickelverfahren und

mit dem Prepreg/Autoklav-Verfahren erzielt werden. Im Faserwickelverfahren wurden E-Glasfasern mit heißhärtender Epoxidharzmatrix des Typs LY556/HY917/DY070 (Fa. Ciba-Geigy) und im Prepreg/Autoklav-Verfahren das Prepreg FIBREDUX 913G-E-5-30 (Fa. Ciba-Geigy) verarbeitet, welches laut Hersteller nahezu identische Werkstoffeigenschaften wie Probekörper aus der zuvor genannten Faser/Matrix-Kombination aufweist. Die im Wickelverfahren hergestellten Probekörper wurden 4 Std. bei 80°C gehärtet und 8 Std. bei 120°C getempert. Der im Autoklav gefertigte Probekörperwerkstoff durchlief den in Tabelle 6/3 beschriebenen Zyklus.

Tabelle 6/3: Autoklavprozeß zur Prepreghärtung

Zeitpunkt in min	Druck in bar	Temperatur in °C	Vakuum in %
0	1	RT	60
30	7	120	10
150	7	120	10
180	1	RT	0

Im Speziellen gestaltete sich die Fertigung der in den folgenden Kapiteln beschriebenen Probekörper wie folgt:

Querdruck UD-Prisma:

Auf stadionförmigen Kernen wurden im Faserwickelverfahren umfangsverstärkte Rohre mit parallel verlaufenden Schenkeln gefertigt. Mittels spanender Verfahren wurden aus den beiden UD-Platten Probekörper herausgearbeitet, die eine genau definierte Geometrie besaßen. Bei einer zweiten Entwicklungsstufe dieses Probekörpers wurde, um jegliche Kerbwirkung von während der spannenden Bearbeitung freigelegten Fasern auszuschließen, die gesamte Probekörperoberfläche mit einem Gelcoat versehen.

Torsionsring:

Bei der Fertigung des Torsionsrings wurden verschiedene Fertigungsstrategien verfolgt. Die Prüfschicht der in den Vorversuchen verwendeten Probekörper wurden aus Prepregs im Handauflegeverfahren mit anschließender Ofenhärtung in einem Schrumpfschlauch gefertigt. Die Methode des Schrumpfschlauchs ergab gegenüber einem Verfahren mit Vakuumsack im Autoklaven die besseren Ergebnisse, d.h. keine Faltenbildung und deutlich homogenere Faserverteilung [Lan94, Hus95]. Zur Vermeidung der sehr leicht auftretenden Zerstörung eines 0°-Rohres beim Entformen, wurde in [Lan 94] eine geeignete Vorgehensweise mit einem teilbaren Kern entwickelt (Bild 6/7). Bei den nachfolgenden Entwicklungsstufen dieses Probekörpers zeigte es sich, daß eine weitere Verbesserung der Laminatqualität im sog. kreuzungsfreien Wickelverfahren erzielt werden konnte. Zur Erzeugung einer ausschließlich parallelen Faserablage muß die Drehrichtung des Wickelkerns beim "Wenden um Pins" jeweils umgekehrt werden (Bild 6/8).

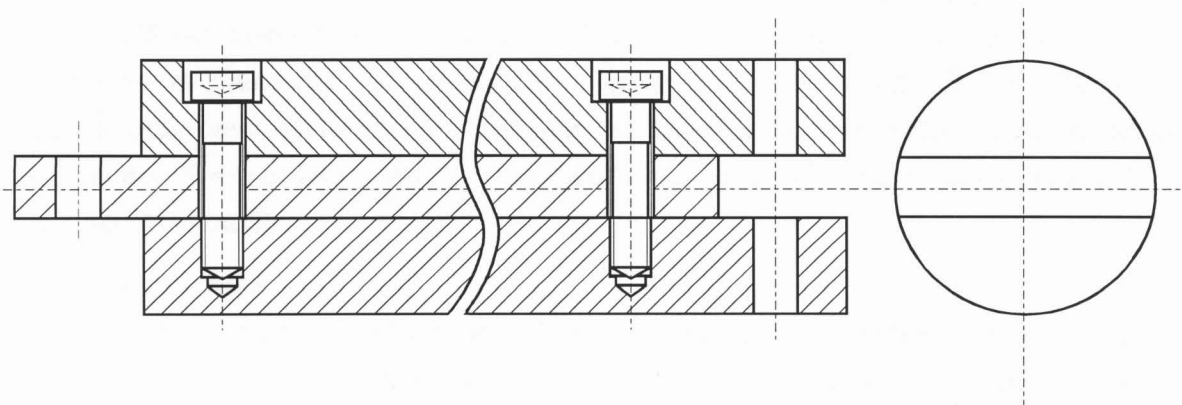


Bild 6/7: Teilbarer Kern zur Fertigung von UD-Rohren aus Prepregs

Die Prüfringe wurden spanend aus den mit Übermaß gefertigten Rohren hergestellt und mit der metallischen Nabe und dem Außenring verklebt, bevor die Geometrie der Prüfzone eingestochen wurde [Cal96]. Neben dem Verkleben wurden auch andere Verbindungstechniken wie Verpressen des Prüfrings mit den Metallringen und die Schrumpfverbindung untersucht; nach allen Vorversuchen erwies sich jedoch die Klebung auf einer sandgestrahlten Oberfläche als am geeignetsten [Hus95].

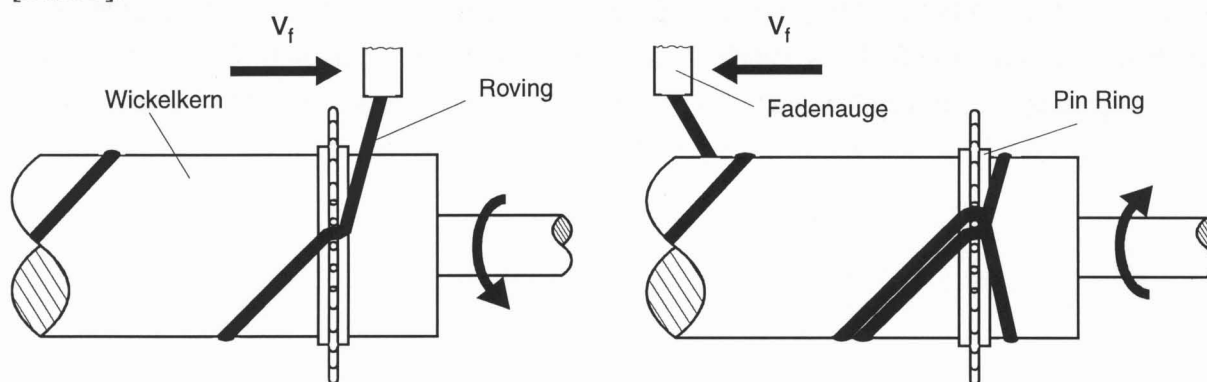


Bild 6/8: Realisierung einer kreuzungsfreien Wicklung

Quetschut-Probekörper:

Siehe Querdruck-UD-Prisma.

Biaxialer Querdruck-Probekörper:

Die Probekörperklötzchen wurden aus einer 10,5 mm dicken, im Prepreg/Autoklav-Verfahren gefertigten Platte ausgesägt. Die Seiten wurden geschliffen bis ein Würfel mit 10 mm Kantenlänge zur Verfügung stand, dessen Kanten zur Vermeidung von Faserablösungen gerundet wurden. Die konzentrischen Mulden, die ein Versagen in der Probenmitte unter biaxialem Druck erst ermöglichen, wurden durch mit speziellen Geometrien versehene Fräsern eingebracht [Wel96].

Geschichteter gerader Biegebalken:

Bei allen Entwicklungsstufen dieses Probekörpers wurde die Prüfschicht in Form einer Platte im Prepreg/Autoklav-Verfahren hergestellt. Während bei den ersten Versuchen noch in situ laminiert wurde, wurden bei allen folgenden Entwicklungsstufen die drei Schichten einzeln ausgehärtet und im

kalten Zustand verklebt [Ahr94]. Auf diese Weise sollten Randspannungen, die beim Abkühlen eines in situ gefertigten ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)-Laminats entstehen, vermieden werden. Bei späteren Versuchsreihen wurden die 0° -Stützsichten aus UD-GFK Prepregs gegen solche aus HT-Kohlenstoffasergewebe mit einem Kett- zu Schußfädenverhältnis von 7/2 ersetzt, um auch Eigenstressen aufgrund des unterschiedlichen Verformungsverhaltens der Prüfschicht gegenüber den Stützsichten auszugleichen (Abstimmung der Querkontraktionszahlen) [Lud96]. Diese weiterentwickelten Stützsichten wurden im Handlaminier/Autoklav-Verfahren mit dem Standardmatrixsystem hergestellt.

Kerngestütztes Rohr:

Grundlage für die Entwicklung dieses Sonderprobekörpers waren die in vorangegangenen Untersuchungen gemachten Erfahrungen, daß Bruchwinkel an Standardrohrprobekörpern im Druckbereich der (σ_2^d, τ_{21})-Bruchkurve zumeist auszuwerten waren. Die bei Versagen der Laminatschicht freiwerdenden Energie sollte durch einen Stützkörper bei sehr geringen zusätzlichen Verformungen aufgenommen werden. Ein solcher Stützkern ließ sich im Gießprozeß aus kalthärtendem LY556/HY951 fertigen, das mit 5% Aluminiumpulver versetzt wurde, um die Abfuhr der exothermen Reaktionswärme zu verbessern und damit ein "Aufkochen" des Harzes aufgrund der großen Wanddicke zu verhindern. Der so erhaltene rechteckige Balken wurde spanend nachbearbeitet. Anschließend wurde die Prüfschicht im Faserwickelverfahren als Umfangswicklung mit einem Orientierungswinkel von 88° - 89° aufgebracht. Bei Verwendung der Standard-Matrix löste sich die Prüfschicht aus nicht geklärten Gründen vom Kern ab. Daher wurde für die beschriebenen Versuche das kalthärtende Matrixsystem LY5052/HY5052 mit sehr langer Topfzeit verwendet [Pou95].

7 DER ZUG/DRUCK-TORSIONSPROBEKÖRPER (σ_2, τ_{21}) [LK, BS, RD, RC]

Zielsetzung: Ermittlung der ZFB-Grenzkurve bzw. (σ_2, τ_{21})-Bruchkurve der Schichtebene

7.1 Verifizierungsweg

Der Zug/Druck-Torsions-(Z/D-T)-Versuch dient zur Bestimmung der Bruchkurve in der (σ_2, τ_{21})-Spannungsebene und - wie sich später herausstellte - sogar des Bruchwinkels. Da es sich hier um die in praxi häufig vorhandenen Spannungszustände in der Schichtebene handelt, sind derartige Z/D-T-Versuche von großem technischen sowie wissenschaftlichem Interesse und finden daher auch in der Literatur die meiste Beachtung. Die Bruchkurve der (σ_2, τ_{21})-Spannungsebene beinhaltet zudem unterschiedliche Bruchtypen, wie den durch $\sigma_{\perp}^z$ verursachten Quer-Normalbruch.

Zur Verifizierung der versagenskritischen Spannungen in der Schichtebene wird eine Z/D-T-Prüfmaschine eingesetzt, die gemeinsam mit der zu verifizierenden Bruchkurve in *Bild 7/1* schematisch dargestellt ist. Die große Anzahl von Informationen, die ein Z/D-T-Versuch liefert, erlaubt erste grundlegende physikalische Bruchphänomene zu erklären, die wiederum auch die Unzulänglichkeiten der pauschalen Bruchkriterien deutlich machen (s. a. Abschnitt 1.2).

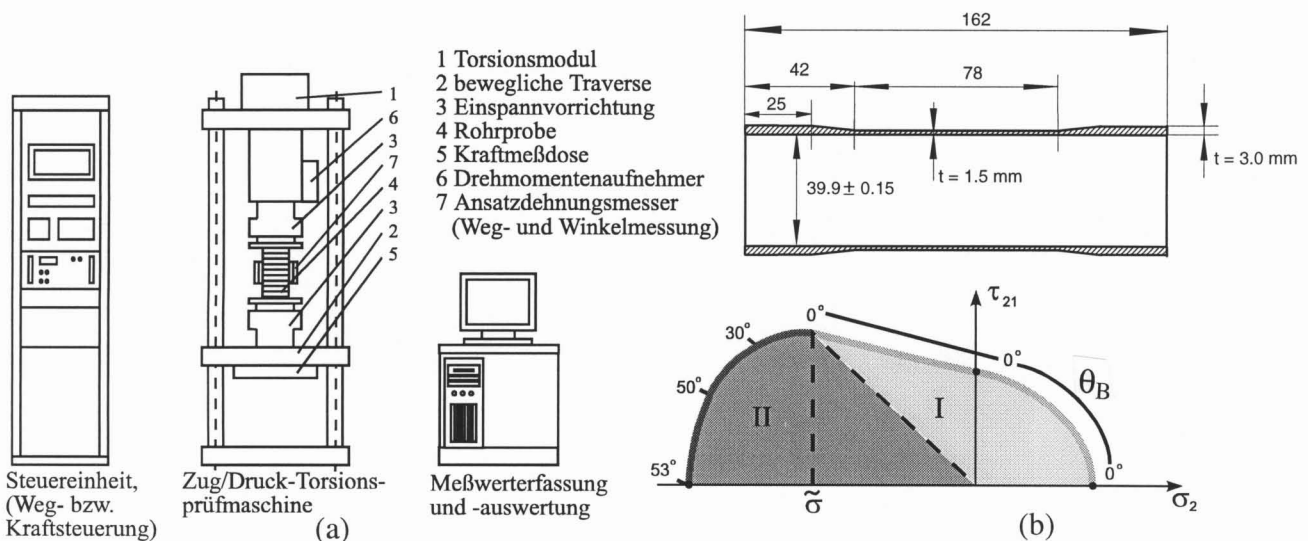


Bild 7/1: Verifizierende Z/D-T-Versuche: (a) Z/D-T-Prüfmaschinenkomplex, (b) Bruchkurve in der (σ_2, τ_{21})-Spannungsebene mit Z/D-T-Rohrprobekörper

7.2 Theoretische Untersuchungen

Der hohe Stellenwert der Versuche mit umfangsgewickelten Z/D-T-Rohrprobekörpern verlangt eine eingehende Modellanalyse, um alle möglichen Störeffekte auszuschließen oder deren Einfluß zu erfassen. Die Störeffekte sind im wesentlichen auf die Herstellungsbedingungen der gewickelten Rohrprobekörper zurückzuführen und machen sich als Eigen- und Störspannungen bemerkbar.

Zur Beurteilung des Einflusses der Eigenspannungen insbesondere infolge Herstellung (Abkühlung, Feuchteaufnahme und Schwindung) sowie der Störspannungen aufgrund nicht exakter Ausrichtung der Fasern in tangentialer Richtung (Winkelabweichung max. 2 Grad) auf das Bruchverhalten des

90°-Z/D-T-Rohrprobekörpers sind umfangreiche Berechnungen durchgeführt worden. Dazu zählen die Modellanalysen von Rohrprobekörpern sowohl unter Axialkraft F und Torsionsmoment M_t beim Bruch als auch unter den herstellungsspezifischen Einflußbedingungen. Hierfür kommt als Berechnungsmethode die auf analytischer Basis erweiterte Theorie zur Berechnung dickwandiger SV-Strukturen zum Einsatz [Kro92, Huf95b,c]. Im einzelnen handelt es sich um Spannungsanalysen für nachfolgende Belastungsfälle (vgl. Bild 7/2):

- Zug F oder • Torsion M_t ,
- Temperatur und Schwindung $T+S$,
- Temperatur, Feuchte und Schwindung $T+M+S$,
- Schwindung S sowie • Feuchte und Schwindung $M+S$.

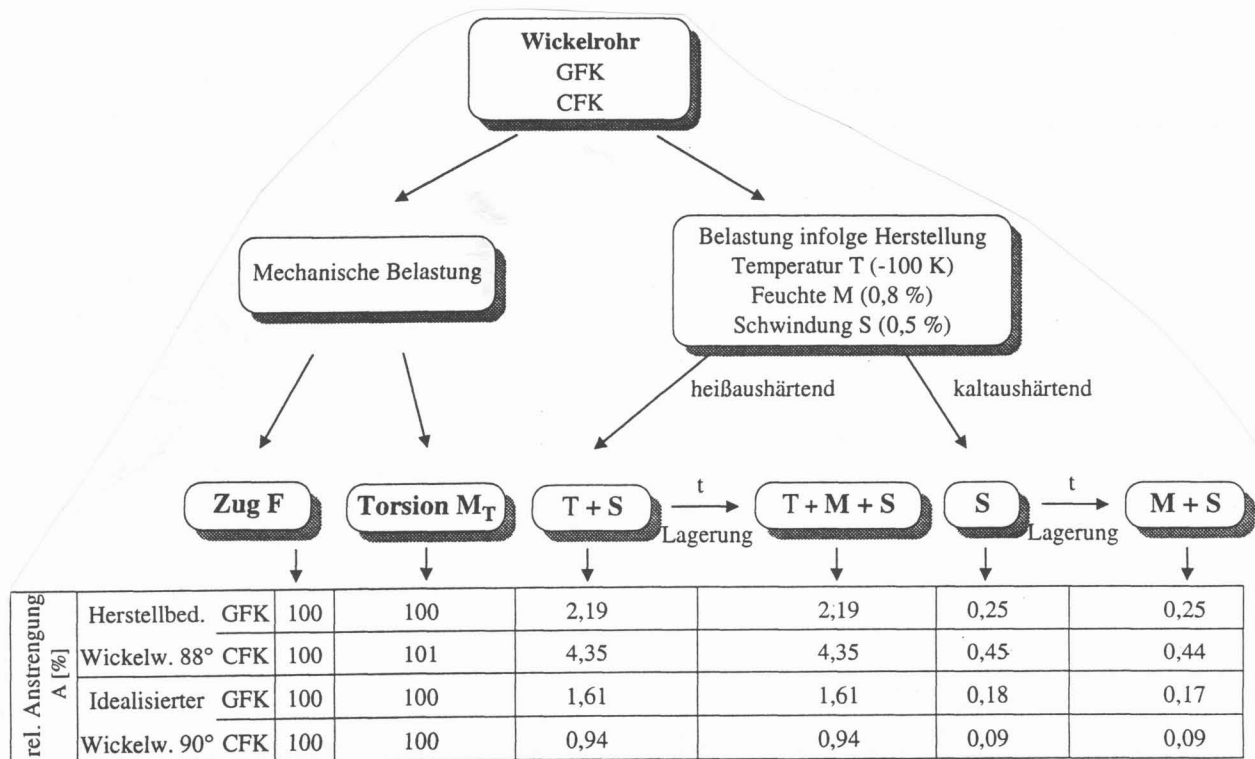


Bild 7/2: Modellberechnungen zur Ermittlung von Eigen- und Störspannungen

Die Spannungsanalysen erfassen neben den Lastspannungen noch die Eigenspannungen infolge Temperatur- und Feuchteeinfluß. Zu den Eigenspannungen zählen ferner auch Spannungen, die durch Schwindung entstehen. Der Feuchteeinfluß macht sich je nach Schichtdicke erst nach einer längeren Zeitperiode (in Bild 7/2 mit Zeit t bezeichnet) bemerkbar und ist gesondert berechnet worden.

Die Geometriedaten des Rohrprobekörpers sind:

Innendurchmesser $D_i = 40$ mm, Wanddicke $t = 3$ mm, Länge $l = 100$ mm.

Als Werkstoffvarianten wurden sowohl glasfaserverstärktes als auch kohlenstoffaserverstärktes EP-Harz betrachtet. Die Kennwerte der Werkstoffe sind Tab. 6/2 bzw. 7/1 zu entnehmen.

Mit Hilfe der erweiterten Schichtentheorie für dickwandige Zylinder sind die Spannungsverläufe in Abhängigkeit vom Radius ermittelt und die maximalen Spannungskombinationen zur Bestimmung der Anstrengung A herangezogen worden. Die rechnerischen Belastungswerte wurden derart gewählt, daß die Anstrengung bei rein mechanischer Belastung für den idealen 90° -Probekörper jeweils den Grenzwert 100 % annimmt (*Bild 7/2*). Die aus den sog. Störeffekten resultierenden Anstrengungen stellen dann die bezogenen Maximalwerte dar.

Exemplarisch sind für die zugbelasteten Rohrprobekörper in *Bild 7/3* die versagensrelevanten σ_n - und τ_{n1} -Spannungsverläufe sowie die zugehörige Anstrengung A in Abhängigkeit vom Wickelwinkel α dargestellt. Hieraus ist eindeutig zu erkennen, daß Unterschiede zwischen der realen 88° -Probe und der idealen 90° -Probe kaum vorhanden sind. Die Anisotropieeffekte der Rohrprobekörper aufgrund der 2° -Abweichung des Wickelwinkels führen praktisch zu keiner Änderung der Anstrengungen im Vergleich zu rein orthotropen Prüfkörpern (vgl. auch Tab. in *Bild 7/2*). Etwas größere Abweichungen der relativen Anstrengungen werden dagegen durch die Überlagerung von Temperatur und Schwindung infolge Herstellung – hauptsächlich bei den CFK-Proben – beobachtet, wohingegen Feuchte infolge der Umgebungsbedingungen und der Lagerung praktisch nicht vorhanden ist. Insgesamt bleiben aber auch hier die maximalen Abweichungen unter dem vereinbarten Wert von 5 %.

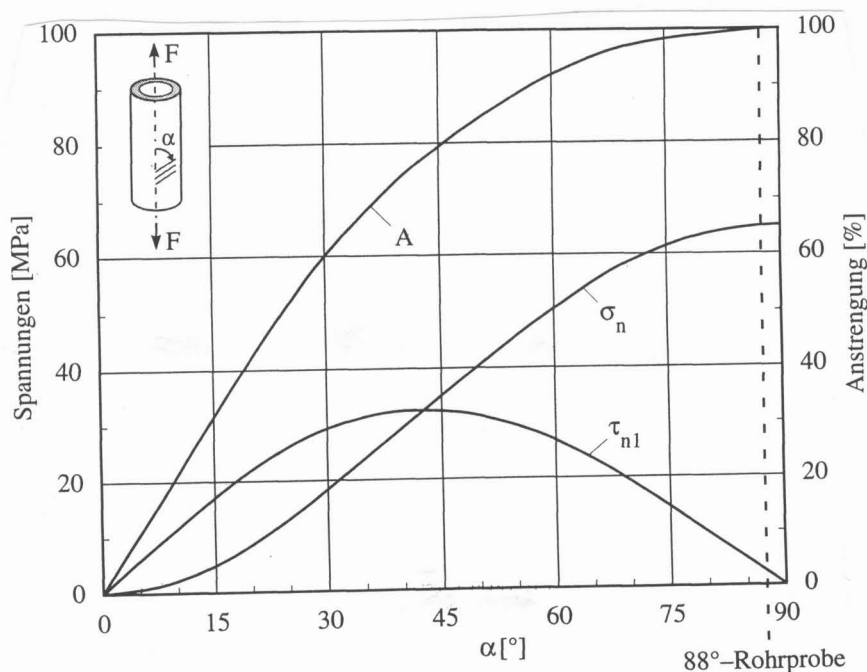


Bild 7/3: Spannungsverläufe und relative ZFB-Anstrengung

7.3 Durchführung der Z/D-T-Versuche

Zur Verifizierung der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve wurden neun Lastpfade ausgewählt, womit sowohl das weitgehend bekannte Bruchverhalten bei Zug-Normalspannungen als auch die Bruchphänomene bei Druck-Normalspannungen noch weiter erforscht werden sollen. Die Anordnung der Lastpfade, die dem *Bild 7/5* zu entnehmen sind, richtet sich nach markanten Stellen der theoretischen Bruchkurve. So etwa lassen sich aus Bruchversuchen mit Lastpfad 4 Aussagen über den Übergang zwi-

schen gekrümmtem und geradem Teil der Bruchkurve gewinnen. Die Lastpfade 6 und 7 dienen dagegen zur Eingrenzung des Übergangsbereiches zwischen τ_{n1} - oder τ_{nt} -bedingten Versagensformen und evtl. zur Lokalisierung des Übergangs von Bruchwinkeln $\theta_B = 0^\circ$ zu $\neq 0^\circ$. Die Lastpfade 4 und 6 erlauben zudem gemeinsam mit Lastpfad 5 die Steigungen $m_{\perp\parallel}^z$ und $m_{\perp\parallel}^d$ zu bestimmen. Die Probekörperanzahl je Lastpfad ist gemäß der auf Grundlage theoretischer Bruchkurvenanalyse zu erwartenden neuen physikalischen Phänomene ausgewählt worden. Dementsprechend ist für den Druckbereich eine höhere Anzahl an Rohrprobekörpern als für den Zugbereich bereitgestellt worden.

Die Kraft und das Torsionsmoment wurden gemäß dem vorgegebenen σ_2/τ_{21} -Verhältnis bis zum Bruch kontinuierlich gesteigert, wobei sowohl die versagenskritischen Spannungskombinationen erfaßt wurden als auch - falls möglich - die zugehörigen Bruchwinkel.

Während der Versuche erfolgte darüber hinaus die Messung der elastischen Eigenschaften, um hieraus zusätzliche Informationen über das Erstversagen zu gewinnen.

Um den Einfluß der Einspannungsart von Proben bei Druck-Torsionsprüfungen auf die Versuchsergebnisse zu bewerten, sind an parallelgewickelten GFK-Standard-Rohrprobekörpern (Matrixsystem LY 556/HT 917/DY 070) Versuche sowohl mit starrer Einspannung (Prüfmaschine der Fa. Zwick) als auch mit gelenkiger Einspannung (Prüfmaschine der Fa. SUTER) durchgeführt worden. Als Lastkombinationen wurden hierfür die Lastpfade 6 und 7 ausgewählt, da sie den interessanten und sensitiven Mischbruchbereich bei Druck-Schub- (σ_2^d , τ_{21})-Beanspruchung am besten charakterisieren.

Die experimentellen Ergebnisse sind in *Bild 7/4* den theoretischen Bruchkurven gemäß den Gln. (1.27) und (1.28) gegenübergestellt. Aus den Ergebnissen geht hervor, daß bei Spannungskombinationen mit höherem Druckspannungsanteil (Lastpfad 7) die gelenkige Einspannung niedrigere Bruchwerte liefert, was sich durch das Auslenken der Kardangelenke und die somit einhergehende Ausbildung zusätzlicher Biegespannungen erklären läßt. Die Kardangelenke liegen hier bereits bei der Hälfte der Bruchkraft an den Wangen an (maximale Schrägstellung), und die dadurch induzierten inhomogenen Spannungsverhältnisse der GFK-Rohrproben werden lediglich als resultierende Druckkraft registriert. Dies führt zur Abminderung der tatsächlichen versagensrelevanten Spannungskombinationen. Im Unterschied dazu bewirkt beim Lastpfad 6 die hohe Schubspannung τ_{21} eine selbstausrichtende Stabilisierung der Kardangelenke. Die unerwünschte systemeigene Schrägstellung der Probekörper ist daher hier von untergeordneter Bedeutung.

7.4 Versuchsergebnisse

Die durchgeführten mehraxialen Bruchversuche erlauben sowohl die versagensrelevanten Spannungskombinationen als auch näherungsweise die zugehörigen Bruchwinkel θ_B zu bestimmen. Als Versuchsproben wurden hierbei die in *Bild 7/1* dargestellten Z/D-T-Rohrprobekörper verwendet, die einen Winkelverbundaufbau ($[\pm 89^\circ]$, Matrixsystem LY556/HT976) bzw. einen Aufbau mit Parallelwicklung ($[89^\circ]$, Matrixsystem LY556/HY917/DY070) aufweisen. Aufgrund der fast tangential-

len Ausrichtung der Fasern tritt zwischen den Winkelverbund- und Parallelwicklungs-Probekörpern kein nennenswerter Unterschied bei den jeweiligen Spannungsverteilungen auf (max. Abweichung $< 0,1\%$), was durch Berechnungen mittels der sog. erweiterten Schichtentheorie bestätigt werden konnte [Kro92].

In ersten Voruntersuchungen ist bereits die Frage geklärt worden, inwieweit die Meßergebnisse bei anteiliger Druckbelastung durch die starre oder gelenkige Einspannung der Probekörper beeinflusst werden. Als Lastkombinationen wurden hierfür die Lastpfade 6 und 7 ausgewählt, da sie den interessanten und sensitiven Mischbruchbereich am besten charakterisieren (Bild 7/4).

Für die weiteren experimentellen Untersuchungen ist somit für den Druckbereich weitgehend die starre Einspannung verwendet worden.

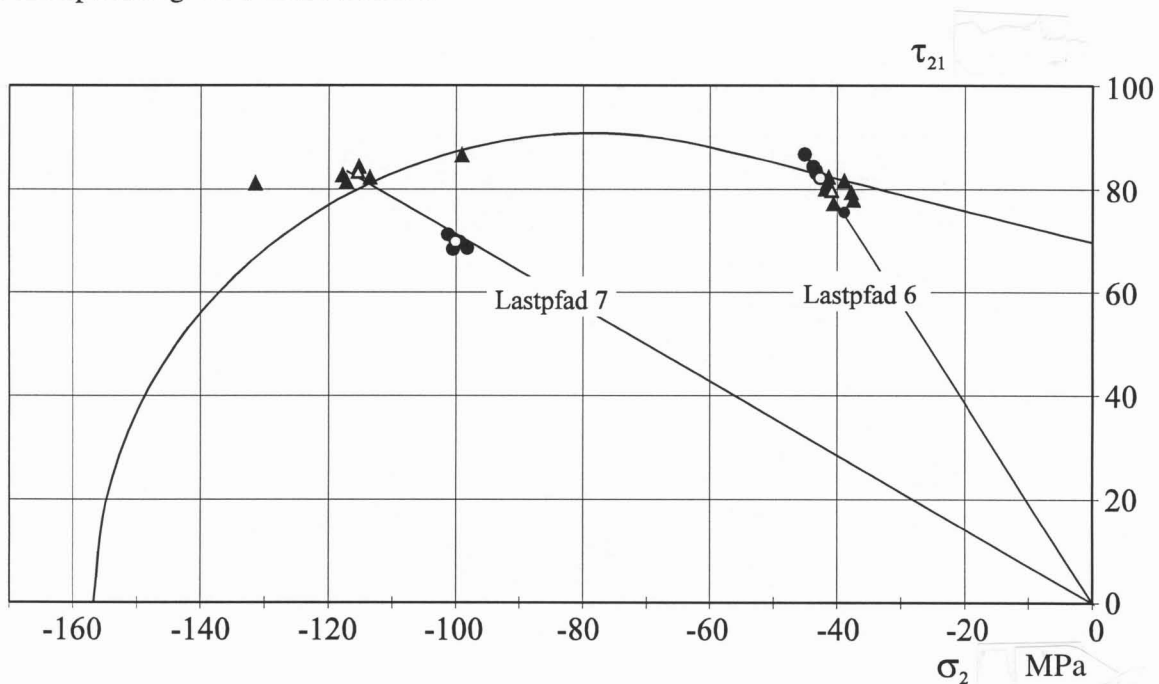


Bild 7/4: Experimentelle Voruntersuchungen an parallelgewickelten GFK-Rohrprobekörpern
(▲, ● starre, gelenkige Einspannung; △, ○ zugehörige Mittelwerte)

Die experimentellen Ergebnisse der Spannungscombinationen beim Bruch sind für die Winkelverbundproben in Bild 7/5 der theoretischen Bruchkurve gegenübergestellt, wobei die Belastungssteigerung gleichmäßig entlang der vorgegebenen Lastpfade bis zum Bruch erfolgte. Die Belastungsgeschwindigkeit wurde so eingestellt, daß der Bruch nach etwa 2 min eingetreten ist. Die Meßergebnisse weisen insgesamt eine recht gute Übereinstimmung mit den theoretischen Bruchwerten auf. Diese gute Abbildung der experimentellen Werte ergibt sich, wenn in der Auswertung die „Ausreißer“ (z. B. Kopfbruch, Versagen infolge größerer Materialfehler) unberücksichtigt bleiben. Die im Bereich geringer Normalspannungen σ_2 platzierten Versuche bestätigen dabei anschaulich, daß die Bruchkurve die τ_{21} -Achse nicht rechtwinklig schneidet. Aus den Bruchwerten von Lastpfad 4 und 5 ergibt sich eine Steigung $m_{\perp\parallel}^z = -0,38$ und aus denjenigen von Lastpfad 5 und 6 die Steigung $m_{\perp\parallel}^d = -0,31$, sofern ein Modell mit unterschiedlichen Parametern verwendet wird [BRUKAN95].

Damit konnte eindeutig nachgewiesen werden, daß mit steigender Druckspannung das Schubversagen infolge τ_{21} zunehmend erschwert wird. Bei sehr hohem Druckspannungsanteil wird dagegen ein Versagen unter der hier vorherrschenden Schubspannung τ_{nt} eingeleitet. Hervorzuheben ist hierbei, daß der Anstieg der Druckspannung einen Wechsel des Abgleitens zugehöriger Bruchflächen von parallel zur Faserrichtung bei reiner Torsionsbelastung bis senkrecht zur Faserrichtung bei reiner Druckbelastung zur Folge hat.

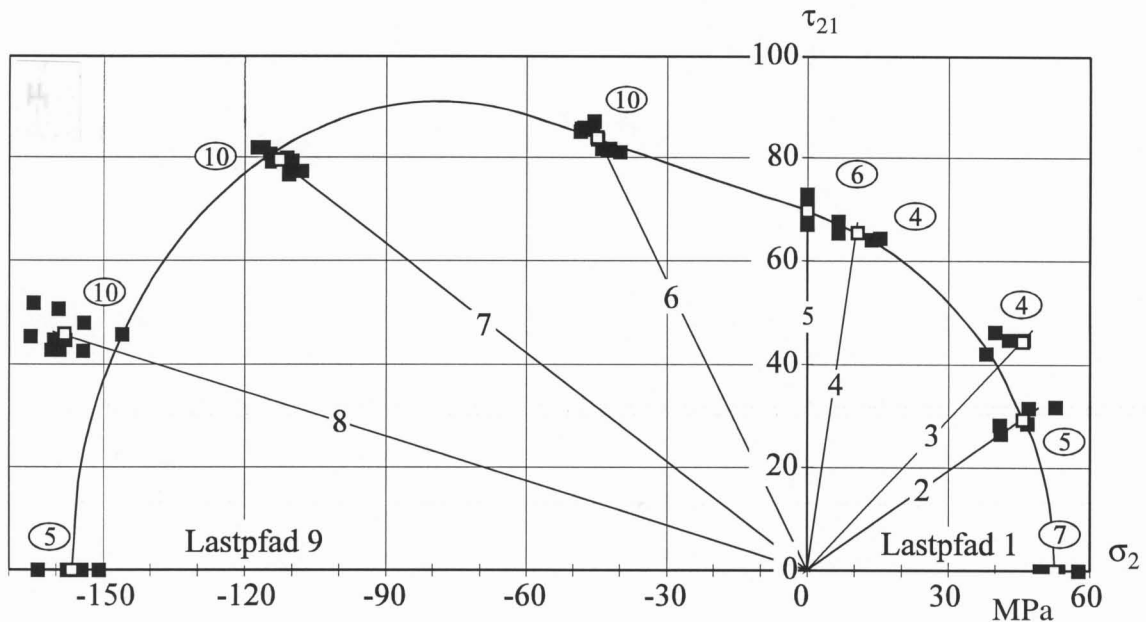


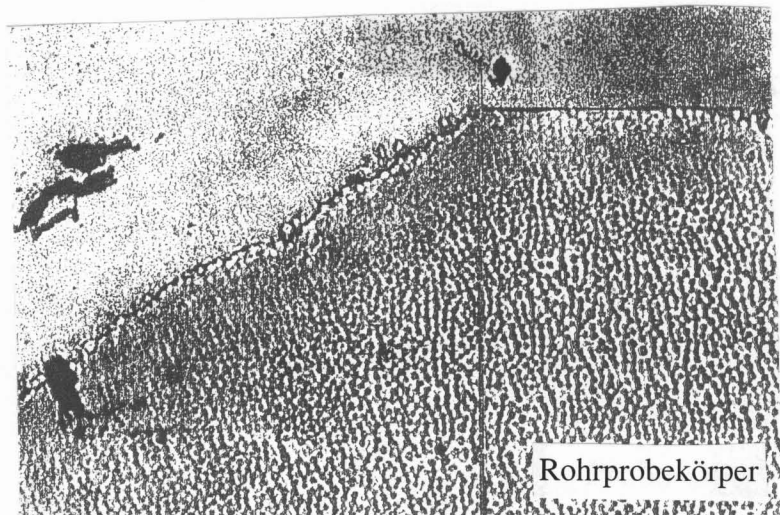
Bild 7/5: Experimentelle Untersuchungen an GFK-Rohrprobekörpern. Z/D-T-Prüfmaschine Zwick 1475. Parallelwicklung $\alpha = 89^\circ$, E-Glas/LY556/HT976, $\bigcirc$ Versuchsanzahl, $\blacksquare$ Meßwerte, $\square$ Mittelwerte; Gln. (3.4, 3.5), $m_{\perp\parallel}^d = -0,31$, $m_{\perp\parallel}^z = -0,38$.

Weitere Versuche für CFK und GFK sind in *Bild 13/1* eingetragen und durch die Gleichungen (3.10) und (3.12) abgebildet worden. Die Steigung $m_{\perp\parallel}$ wurde allerdings nur grob mit 0,3 angesetzt.

7.5 Bruchwinkelmessungen am Z/D-T-Probekörper

Um die vorausberechneten Bruchwinkel zu bestimmen, sind die Bruchflächen der geprüften Winkelverbund- und Parallelwicklungs-Probekörper vermessen worden. Obwohl zunächst befürchtet wurde, daß bei Belastungsversuchen mit Druckspannungsanteilen durch Ineinanderpressen der Bruchflächen keine Aussage bezüglich der Bruchwinkel möglich sein würde, konnte insbesondere bei den parallelgewickelten Probekörpern eine über den Umfang relativ gleichmäßig orientierte Bruchfläche beobachtet werden. Sofern die Möglichkeit dazu bestand, wurden im wesentlichen die Bruchbereiche ausgewertet, die auf einen Versagensbeginn hindeuteten. Besonders schwierig gestaltete sich eine derartige Auswertung bei den Winkelverbundprobekörpern, da sich hier eine extrem zerklüftete Bruchlandschaft ausbildete. Eine Hilfe bei der Identifizierung der Erst-Versagensbereiche leisteten einerseits die kontinuierliche Überwachung der Verformungen und Verdrillungen der Rohrprobekörper mittels Ansatzdehnungsmesser sowie DMS und andererseits die genaue Betrachtung ausgewählter Bruchbereiche mittels mikroskopischer Aufnahmen. In Bild 7/6 ist dazu exemplarisch die Bruchfläche eines druckbelasteten Z/D-T-Probekörpers dargestellt.

Bild 7/6: Mikroskopische Aufnahme der Bruchfläche
($\theta_B = 58^\circ, \sigma_2 = -158 \text{ MPa}, \tau_{21} = 0$)

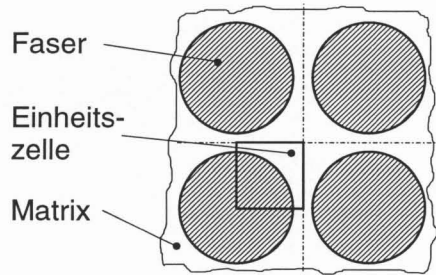


Die Ergebnisse der Bruchwinkelmessungen sind in Bild 13/2 zusammengefaßt. Deutlich zu erkennen ist hier der steile Anstieg der Bruchwinkel im Mischbruchbereich, der sich etwa zwischen den Lastpfaden 6 und 7 vollzieht. Bei sehr hohen Druckspannungen (Lastpfad 8 und 9) bleibt der Bruchwinkel weitgehend konstant und erreicht Werte von ca. 60° (vgl. dazu das Kap. "Das Querdrukprisma"). Weitere Bruchwinkelmessungen an einem CFK-Z/D-T-Rohrprobekörper sind im Kapitel Ergebnisdarstellung aufgeführt (Bild 13/3).

7.6 Abschätzung des Einflusses d. Aushärtungs-Eigenstressungen eines UD-Probekörpers

7.6.1 Analyse

Als Rechenmodell wurde eine quadratische Faserpackung in einer UD-Schicht angenommen und eine Scheibe in der (x_2, x_3) -Ebene herausgeschnitten. Von dieser Scheibe wiederum wurde nur eine sich wiederholende "Einheitszelle" verwendet.



1. Temperaturabfall
von Faser und Matrix $\Delta T = -100^\circ\text{C}$
2. Festkörperschwindung
der Matrix $\epsilon_s = -0,1 \%$
Feste Faser-Matrix-Bindung, Stirnflächen
($x_1 = \text{const.}$) bleiben eben und parallel

Bild 7/7: FE-Modell der Einheitszelle, Einheitslastfälle und zugehörige Annahmen

In der FEM-Berechnung fanden folgende Faser- und Matrix-Kennwerte Anwendung:

Tab. 7/1: FKV- sowie Faser- und Matrix-Kennwerte ($\nu_f = 0,6$)

	$E_{ }$ MPa	$E_{\perp}$ MPa	$G_{ \perp}$ MPa	$\nu_{ \perp}$	$\nu_{\perp\perp}$	$E_{f }$ MPa	$E_{f\perp}$ MPa	$G_{f \perp}$ MPa	$\nu_{f\perp\perp}$	$\nu_{f \perp}$	$\alpha_{f }$ 10 ⁻⁶ /K	$\alpha_{f\perp}$ 10 ⁻⁶ /K
CFK T800/ Epoxid	160 000	9 300	5 400	0,32	0,40	264 000	9 900	4 060	0,31	0,30	-3	+ 15
transversal-isotrop												
GFK E-Glas/ Epoxid	44 500	12 500	6 000	0,28	0,40	74 500	74 500	29 800	0,25	0,25	+4,8	+4,8
isotrop												
Epoxid harz	E_m		ν_m		α_{Tm} 10 ⁻⁶ /K	T800/ Epoxid		$\alpha_{T }$ 10 ⁻⁶ /K	$\alpha_{T\perp}$ 10 ⁻⁶ /K	E- Glas/ Epoxid	$\alpha_{T }$ 10 ⁻⁶ /K	$\alpha_{T\perp}$ 10 ⁻⁶ /K
	3 500		0,35		50			-3	+40		+7	+30
	Meßwerte											

Als C-Faser-Rechenbeispiel wurde die stark anisotrope T800-Faser genommen, weil sie den größeren Effekt gegenüber der verwendeten T300-Faser zeigt.

Die Ergebnisse der rechnerischen Untersuchungen sind für den Einheitslastfall ΔT in den Farbbildern 7/1 und 7/2 dargestellt.

Als erstes wesentliches Ergebnis (nicht dargestellt) zeigt sich, daß die Schwindung praktisch durch einen Temperaturabfall modelliert werden kann: $\epsilon_s = -0,1 \%$ entspricht bei GFK spannungsmäßig ungefähr einem Temperaturabfall von $\Delta T = -20^\circ \text{C}$. Damit benötigt man für die Ermittlung von Schwindspannungen nurmehr den Lastfall Temperaturabfall und erfaßt den Schwindungseffekt mittels eines Faktors. Dies gilt für GFK gleichermaßen.

Bei Temperaturabfall treten Zugspannungen längs der Faser mit Werten gemäß $\sigma_{1m} \approx E_m \cdot \alpha_{Tm} \Delta T$ auf. Da diese Spannungen von der Faser dehnungskontrolliert werden, sind sie aber solange unkritisch wie die Bruchdehnung der Matrix e_m noch nicht erreicht ist. Generell sollten deshalb Matrices mindestens 6 % Bruchdehnung haben. Damit tritt kein Matrixversagen auf, weil vorher schon die Faserbruchdehnung e_f erreicht wird.

Wichtiges Ergebnis für die Festlegung des Aushärtezyklus ist die Höhe der im Matrixzwickel zwischen den Fasern ermittelten Zugspannungen σ_{2m}^z , σ_{3m}^z (Bild 7/8), die kleiner R_m^z bleiben müssen, damit das Bauteil nach Ofenentnahme nicht "auseinander fällt". Weiter zeigt sich, daß die Zug-

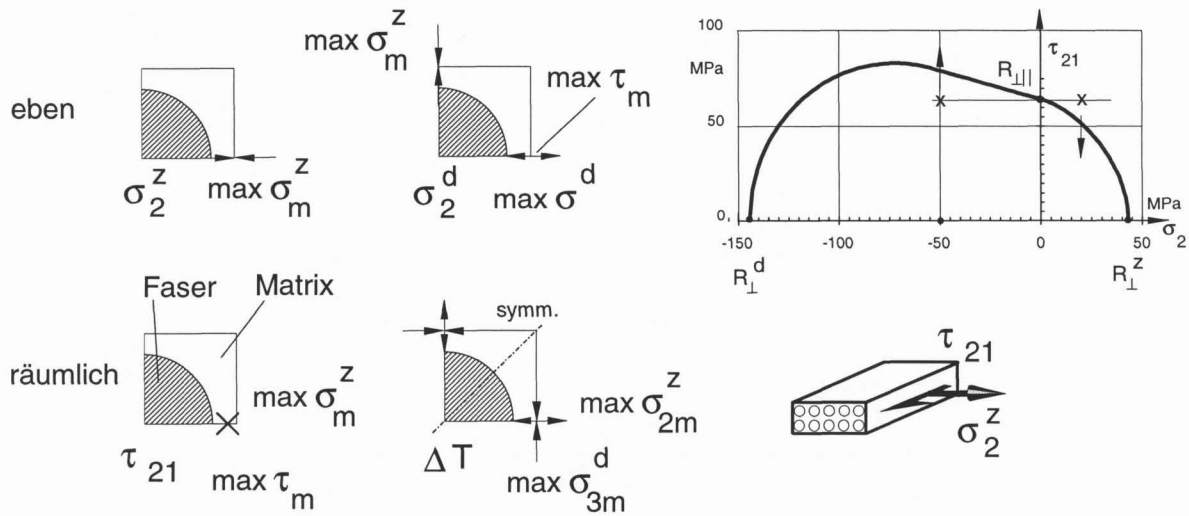


Bild 7/8: Bruchkurve der Lastspannungen und Lokalisierung der maximal beanspruchten Stellen in der Matrix um die Einzelfaser für die 4 Lastfälle σ_2^z , σ_2^d , τ_{21} und ΔT . E-Glas/Epoxid

spannungen konzentrisch zur Faser verlaufen, während die Druckspannungen radial in der kürzesten Faserdistanz ausgerichtet sind. Das sich beim Abkühlen einstellende Spannungsfeld könnte somit im Rahmen des Modells "Quadratische Packung" wie ein Fachwerk betrachtet werden. Die direkten Verbindungen zwischen den Fasern stellen "Druckstreben", die Diagonalen des Modells "Zugstangen" dar (Bild 7/7). Für GFK liegen hierbei die Matrix-Spannungen in der Diagonalen im Fall $\Delta T = -100^\circ \text{C}$ bei $\sigma_m^z = 25 \text{ MPa}$, für CFK bei 23 MPa.

Im Vergleich der zwei betrachteten FKV zeigt sich:

- ΔT verursacht bei CFK praktisch dieselben Werte $\max \sigma_m^z$
- Unter $\sigma_\perp^d = -50 \text{ MPa}$ -Beanspruchung sinken bei der querweicheren C-Faser gegenüber der isotropen Glasfaser die Werte auf $\max \sigma_m^z < 12 \text{ MPa}$ und $|\sigma_m^d| < 28 \text{ MPa}$ ab, es vergleichmäßigigt sich der Spannungszustand etwas
- Unter $\tau_{21} = R_{\parallel}$ -Beanspruchung vergleichmäßigigt sich der Spannungszustand ebenfalls, $\max \sigma_m^z < 84 \text{ MPa}$, d. h. um etwa 10% gegenüber GFK
- Unter $\sigma_\perp^z$ -Beanspruchung nimmt der Wert von $\max \sigma_m^z$ ebenfalls ab. Hieraus ist zu schließen, daß bei gleicher Matrix mit T800/Epoxid etwas höhere Festigkeiten $R_\perp^z$, $R_\perp^d$, $R_{\parallel}$ als mit E-Glas/Epoxid erreicht werden können
- Aus den Rechenergebnissen kann weiter gefolgert werden, daß der Buckelanstieg für CFK ein klein wenig höher als für GFK sein sollte.

Die Überlagerung der Eigenspannungen 2. Art mit den Lastspannungen war Gegenstand weiterer Untersuchungen, deren Ergebnisse im folgenden Kapitel präsentiert werden.

7.6.2 Versuch einer mikromechanischen Erklärung der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve

Beim Aushärten der UD-Schicht entstehen Verspannungen zwischen Faser und Matrix als Folge der Aushärtungseigenspannungen aus thermischer Schrumpfung und Matrixschwindung im Festkörperzustand. Die Summe dieser Eigenspannungen bildet einen Spannungszustand, der sich nur schwer abschätzen läßt, weil Werkstoffdaten, FEM-Idealisierung und Packungsdichte ungefähre Annahmen oder Modelle sind. Trotzdem soll versucht werden, mit dem vorgestellten Faser-Matrix-Modell eine mechanische Erklärung tendenzmäßig herzuleiten.

Es soll speziell untersucht werden, ob durch Berücksichtigung der Aushärtungsspannungen der in Pucks Modell makromechanisch durch $\mu_{\perp\parallel}$ erfaßte Buckel mikromechanisch erklärt werden kann. Die zugehörigen Überlegungen basieren im übrigen darauf, daß Festigkeitskriterien in der Regel als Anrißkriterien gesehen werden.

Bei einer Matrix, die unterhalb "Raumtemperatur +100° C" in den Festkörperzustand übergeht, werden nach Abkühlung auf Raumtemperatur, d.h. um -100° C, am Glasfaserrand faserparallele Zug-Eigenspannungen σ_m^z von etwa 25 MPa ($v_f = 60\%$) geweckt. Die Glasfaser erfährt dabei leichte Druckspannungen σ_f^d in Fasermitte von ca. -20 MPa und wird dabei leicht verkürzt (C-Faser gedehnt). Eine Matrixschwindung von 0,1 % entspricht etwa der Wirkung von -20° C und würde somit eine zusätzliche faserparallele Spannung in Fasermitte σ_m^z von etwa 6 MPa erzeugen. Das Zusammenwirken beider Aushärtungseigenspannungen bedingt, welchen Wert die Festigkeiten $R_{\perp\parallel}$, $R_{\perp}^d$, $R_{\perp}^z$ annehmen.

Bei linearer Überlagerung des Einflusses der Aushärtungseigenspannungen ($\Delta T = -100^\circ \text{C}$) stellt sich heraus, daß diese die Wirkung der mechanischen Beanspruchungen (Lastspannungen) bzgl. der Matrix (inkl. Interface) als ZFB-kritischer Komponente wie folgt beeinflussen:

- $R_{\perp}^z$: Die Lastspannung $\max \sigma_m^z$ wird um ca. 10 % erhöht, so daß R_m^z als bruchentscheidende Größe "schneller" erreicht wird und damit $R_{\perp}^z$ niedriger wird als es rein lastbezogen der Fall wäre
- $R_{\perp\parallel}$: $\max \sigma_m^z$ aus Last wird ca. 10% niedriger, so daß in Überlagerung $R_{\perp\parallel}$ höher wird
- $R_{\perp}^d$: $\max \sigma_m^z$ aus Last wird durch die Eigenspannungen zwar verdoppelt, die bruchkritische Schubspannung τ_m behält aber ihren Wert, so daß in Überlagerung $R_{\perp}^d$ bleibt.

Für das Verstehen dieser Ergebnisse sei noch festgehalten, daß die *Überlagerung* der Hauptspannungen aus Aushärtung und Lastfällen *räumlich* erfolgt, und daß dabei die *Richtung* der größten Hauptspannung in beiden Fällen *unterschiedlich* ist.

Natürlich kann das Modell nur Tendenzen und keine absoluten mittleren Werte vorhersagen!

Wird eine reine Querbeanspruchung $\sigma_{\perp}^d$ auf den Faser-Matrix-Verbund aufgebracht, so wird infolge der Querkontraktion eine kleine Längsdehnung und damit kleine Zugspannung in der *Faser* den schon vorhandenen kleinen Aushärtungseigenspannungen in der Faser überlagert. In der *Matrix* entstehen neben bruchentscheidenden Schubspannungen noch Zugspannungen, üblicherweise Spaltzugspannungen genannt, die bei der Bruchinitiierung mitwirken.

Die Betrachtung der Überlagerung von Lastspannungen σ_2 mit τ_{21} führt zu folgenden Tendenzen bezogen auf den Punkt $\tau_{21} = R_{\perp\parallel}$ (s. Farbbilder 7/1 bis 7/4):

- ($\sigma_2^d = -85 \text{ MPa}$, $\tau_{21} = 61 \text{ MPa}$): $\sigma_m^z(\tau_{21})$ und $\sigma_m^z(\sigma_2^d)$ wirken räumlich in etwa gegensinnig, so daß mikromechanisch ein starker Anstieg der Kurve erwartet werden darf, bis Querdruck nunmehr praktisch allein noch maßgeblich ist.

Der Buckel ist somit schon ohne Aushärtungseigenspannungen erklärbar!

- ($\sigma_2^z = 20 \text{ MPa}$, $\tau_{21} = 61 \text{ MPa}$): $\max \sigma_m^z$ wird um ca. 10 % erhöht, so daß für $\sigma_2^z = 20 \text{ MPa}$ $\max \tau_{21}$ ca. 47 MPa betragen wird

Für den betrachteten CFK ergeben sich aufgrund der transversalen Isotropie der Faser geringfügige (günstigere) Änderungen der Aussagen für GFK (isotrope Faser). Bei gleicher Matrix gilt (Farbbild 7/5):

- ΔT : verursacht bei CFK etwa dieselben Spannungswerte $\max \sigma_m^z$
- $\sigma_{\perp}^d$: $\max \sigma_m^z$ sinkt bei der querweicheren C-Faser gegenüber der isotropen Glasfaser. Spannungszustand in der Einheitsstelle vergleichmäßigt
- τ_{21} : $\max \sigma_m^z$ sinkt, Spannungszustand vergleichmäßigt
- σ_2^z : $\max \sigma_m^z$ sinkt, Spannungszustand vergleichmäßigt
- Der Buckelanstieg ist eher etwas steiler als bei GFK.

8 DAS QUERDRUCK-UD-PRISMA (σ_2^d, θ_B^d) [JK, DH, RD]

Zielsetzung:

- Untersuchung der Querdruckspannung σ_2^d zwecks Feststellung des Bruchwinkels θ_B^d
- Ermittlung eines Mittelwertes für den deterministisch betrachteten Reibungskoeffizienten $\mu_{\perp}$ oder die Steigung $m_{\perp}$ (im Kurvenpunkt $\sigma_n = 0$)
- Darstellung des Zusammenhangs von θ_B^d , $R_{\perp}^d$ und $R_{\perp}^A$ bzw. $R_{\perp}^M$ (parabol. Modell).

Ein uniaxialer Druckversuch ist im Hinblick auf die Überprüfung der Hypothese H II' (vgl. Kap. 2.4) von außerordentlicher Bedeutung. Eine Druckspannung σ_2^d erzeugt auf einer beliebigen Wirkebene die Spannungen $\sigma_n = \sigma_2^d \cos^2 \theta$ und $\tau_{nt} = \sigma_2^d \sin \theta \cos \theta$. Der Hypothese folgend trägt die Drucknormalspannung σ_n^d nicht zur Erzeugung des Bruchs bei, sondern erschwert den durch die Schubspannung τ_{nt} verursachten Schubbruch.

Die maximale Schubspannung tritt unter einem Winkel von $\theta = 45^\circ$ auf. Betrachtet man jedoch den Mohrschen Kreis für diesen Belastungsfall, so ist einsichtig, daß eine relativ kleine Vergrößerung Δ_B^d des Bruchwinkels - bedingt durch innere Reibung - die auf der Wirkebene auftretende Schubspannung τ_{nt} nur geringfügig ändert, während die bruchbehinderte Spannung σ_n^d deutlich abnimmt (*Bild 8/1*).

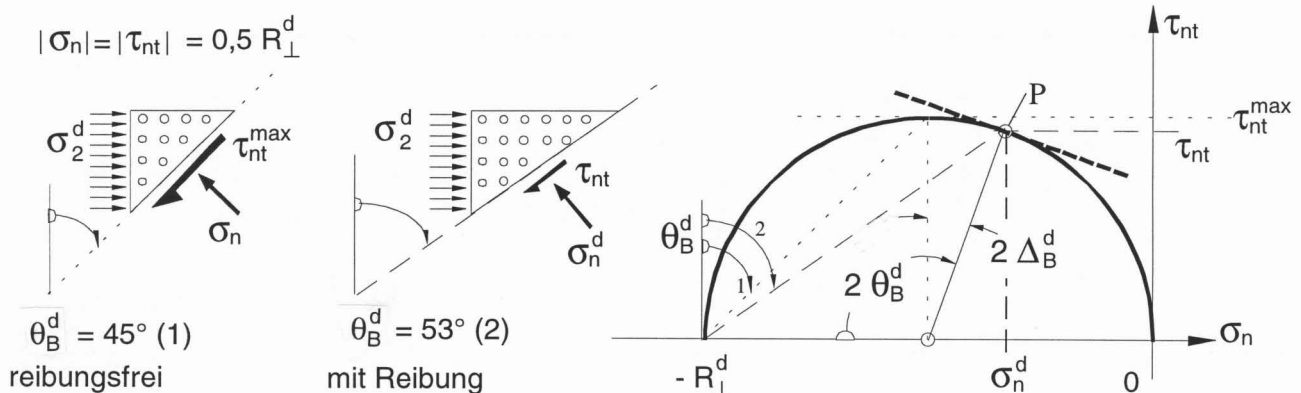


Bild 8/1: Mohrscher Kreis für reine Querdruck-Beanspruchung $\sigma_{\perp}^d$

Für einen Querdruckversuch mit Reibung müssen daher Bruchwinkel erwartet werden, die größer als $\theta_B = 45^\circ$ sind. Die Auswertung der Bruchwinkel sollte zudem eine quantitative Aussage über die Größe des bruchbehinderten Einflusses von σ_n^d geben.

8.1 Verifizierungsweg

Druckversuche sind problematisch, weil in vielen Fällen Stabilitätsversagen in Form von Ausknicken des Probekörpers vor dem Festigkeitsversagen auftritt. Die Prüfzone von Druckprobekörpern muß daher eine gedrungene Gestalt haben. Besondere Beachtung ist, wie bei jedem werkstoffkundlichen Versuch, der Krafteinleitung zu widmen [Tar81, Car89].

Zur Ermittlung der Längs-Druckfestigkeit $R_{\parallel}^d$ von UD-FKV wird üblicherweise die sog. IITRI-Vorrichtung (DIN 65380, DIN 29371) benutzt [Hof77, Car89]. Sie erlaubt das Einleiten der hohen, zur Erzielung von Faserbruch notwendigen Prüfkkräfte über Oberflächenreibung entlang der Seitenflächen des Probekörpers über einer großen Einspannstrecke.

Zur Erzeugung von ZFB aufgrund von Quer-Druckbeanspruchung $\sigma_{\perp}^d$ sind erheblich geringere Prüfkkräfte notwendig. Sie können direkt durch Oberflächendruck eingeleitet werden [Huy96]. Bei einer solchen Krafteinleitung ist allerdings zu beachten, daß durch den Kontakt zwischen Prüfkörper und Prüfvorrichtung Störspannungen entstehen. Diese werden durch die Behinderung der Querausdehnung erzeugt, da der Einfluß der Reibung in der Kontaktfläche nicht vollständig eliminiert werden kann. Die behinderten Dehnungen (in beiden Richtungen der Ebene) führen zu Spannungen im Bereich unter der Druckplatte (*Bild 8/2*).

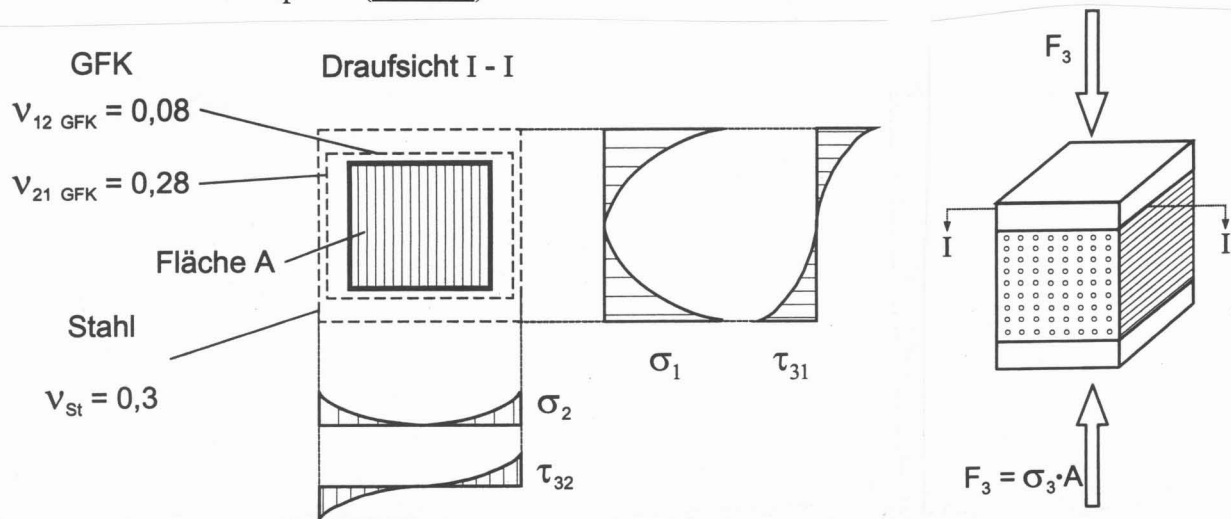


Bild 8/2: "Stör"spannungen aufgrund des unterschiedlichen Querkontraktionsbestrebens

Während die Störspannung σ_1^z in Faserrichtung von untergeordneter Bedeutung ist, kann dies für die aus der Mitte zu den Rändern anwachsende zusätzlichen Störspannungen σ_2^z , τ_{31} und τ_{32} nicht ohne weiteres angenommen werden. Es ist deshalb dafür zu sorgen, daß die höchste Bruchgefahr in einem Bereich erwartet werden kann, wo der Einfluß dieser Quer-Zugspannung abgeklungen ist.

8.2 Erste Entwicklungsstufe: Geometriewahl und erste Bruchwinkelmessungen

In einer ersten Entwicklungsstufe wurden zunächst rein empirisch die Dimensionen des Krafteinleitungsbereichs so lange variiert (Längen-/Querschnittsverhältnis der Schulter der Probe), bis bei der endgültig gefundenen, gedrunenen Form einerseits kein Ausknicken mehr auftrat und andererseits die Prüfzone eine Länge hatte, die die Ausbildung eines keilförmigen ZFB ermöglichte, der nicht in den Schulterbereich hineinlief [Huy96]. In *Bild 8/3* ist die für die ersten Querdruck-Prismen ermittelte Geometrie dargestellt.

Von den 15 geprüften UD-Prismen erbrachten lediglich 10 ein verwertbares Ergebnis. Der lineare Mittelwert der Bruchwinkel beträgt $\theta_B^d = \pm 49^\circ$ bei einer Standardabweichung von $2,7^\circ$. Trotz des gut reproduzierbaren Ergebnisses dieser Versuchsreihe war es unerlässlich, eine weitere Verbes-

serung der Probekörpergeometrie vorzunehmen, da es sich zeigte, daß ein Großteil der ZFB in die

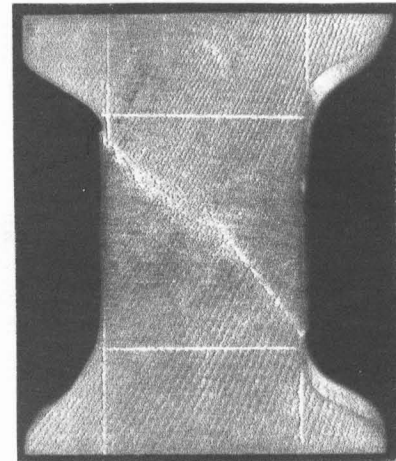
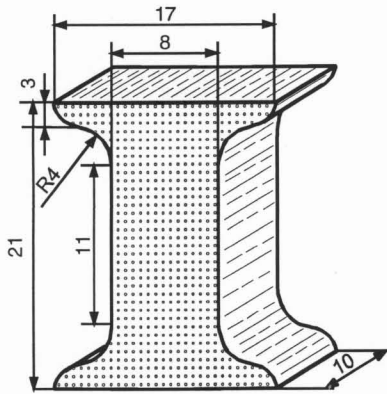


Bild 8/3: Geometrie der UD-Prismen (erste Entwicklungsstufe)

Übergangsradien zur Krafteinleitung hineinliefen. Es konnte somit nicht davon ausgegangen werden, daß eine größere Prüfzone nicht auch steilere Bruchwinkel zuließ; zudem war aufgrund der geringen Radien (R_4) auch eine Rißinitiierung im Schulterbereich nicht auszuschließen.

Legt man die in Tab. 6.2 festgelegten Verhältnisse der Wirkebene-Bruchwiderstände zugrunde und als ersten Anhaltswert für die Steigungen $|m_{\parallel}| = |m_{\perp}| = 0,15$, so ergibt sich – bei Verwendung von Modell #1 – der in *Bild 8/4* über den möglichen Bruchwinkeln dargestellte Verlauf der "Bruchgefahr" $D(\theta)$.

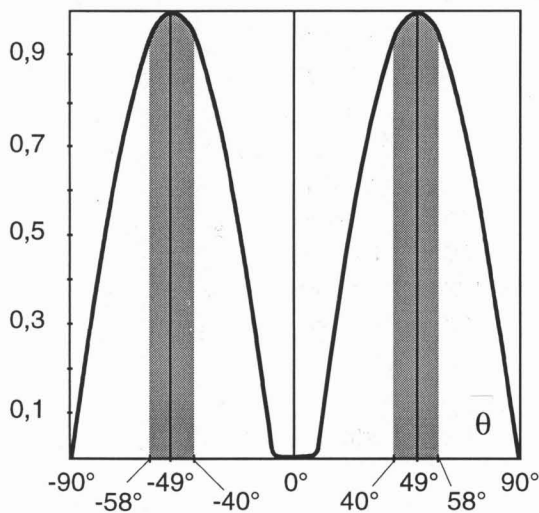


Bild 8/4:

Verlauf der Bruchgefahr für $\sigma_2 = -140 \text{ MPa}$ [Fab96].

($|m_{\parallel}| = |m_{\perp}| = 0,15$ angesetzt).

Die sehr gute Übereinstimmung von Versuch und Theorie läßt sich durch die scharf ausgeprägten Maxima der Kurve der Bruchgefahr begründen. Allerdings wird durch eine Erhöhung der Steigung $|m_{\perp}^d|$ auch automatisch der bruchbehindernde Einfluß der Quer-Normalspannung σ_n^d auf der Bruchebene vergrößert, was in einer Vergrößerung des theoretischen Bruchwinkels θ_B^d resultiert.

8.3 Zweite Entwicklungsstufe: FEM-Optimierung, Modellparameterermittlung

Die Geometrieoptimierung des UD-Prismas wurde mittels einer Analyse nach der Finite-Elemente-Methode (FEM) durchgeführt. Mit Hilfe der FEM können Spannungszustände an jedem

Ort auch für geometrisch komplexe Probekörper ermittelt und dann mit Hilfe von Festigkeitskriterien die lokalen Anstrengungen berechnet werden. Das ZFB-Kriterium wurde daher in ein FEM-Programm mit der Zielsetzung implementiert, die Möglichkeiten der FEM für die Weiterentwicklung der Probekörper für die verschiedenen Versuche zu nutzen. Im Versuch soll der Bruch unter definierten Bedingungen, d.h. bei einem homogenen Spannungszustand erzeugt werden, der eine eindeutige Auswertung der Ergebnisse gewährleistet. Die diesen definierten Spannungszustand störenden Einflüsse sollen erkannt und soweit wie möglich reduziert werden; so daß die hieraus resultierende maximale Anstrengung und der zugehörige Bruchwinkel quantifiziert werden.

8.3.1 FEM-Optimierung

Das UD-Prisma der ersten Entwicklungsstufe wurde entsprechend *Farbtafel 8/1* für die FEM-Berechnung modelliert [Lau95]. Durch Ausnutzung von Symmetrien kann das Berechnungsmodell auf ein Achtel des gesamten Probekörpers beschränkt werden. Für den Quer-Druckprobekörper wurde die Druckbelastung durch Vorgabe einer Stauchung modelliert, indem die Bewegung der unteren Fläche in Prüfrichtung unterbunden wird und die obere Fläche um einen konstanten Betrag so heruntergedrückt wird, daß die Anstrengung A in der Prüfzone etwa 1 (gelb) ist. Die Anstrengung in der Krümmung ist bei dieser Belastung um etwa 26% höher. Daraus folgt, daß der Bruch von dieser Stelle ausging und nicht, wie beabsichtigt, in der Mitte des Druckprismas seinen Ursprung hatte. Ferner zeigt sich, daß die Anstrengung auch in der Mitte der Fläche unter dem Druckstempel größer ist, als in der Prüfzone, also der Taille des Probekörpers.

Um die höchste Anstrengung in die Prüfzone zu verlagern, wurde die Geometrie des Probekörpers verändert. Neben einer Verlängerung des Meßbereichs wurde der Krümmungsradius um den Faktor 3 vergrößert, was zu den in *Farbtafel 8/2* dargestellten Ergebnissen führte. Die unteren drei Bilder stellen die Bruchwinkel dar. Neben einem eindeutigen Maximum der Kurve der Bruchgefahr – d.h. es gibt einen eindeutigen Bruchwinkel – können auch symmetrische Maxima vorliegen (vgl. *Bild 8/4*) deren Ausgabe mit +100 gekennzeichnet wurde. Ein dritter denkbarer Fall ergibt sich aus der Überlegung, daß für Spannungszustände ohne longitudinalen Schub ($\tau_{21} = \tau_{31} = 0$), der verbleibende ($\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$)-Spannungszustand - als Mohrscher Kreis in der (σ_n, τ_{nt})-Ebene dargestellt - zwei Berührungspunkte mit der (σ_n, τ_{nt})-Bruchkurve besitzen kann. Die betragsmäßige Summe der zugehörigen Bruchwinkel ergibt sich zu $|\theta_{B1}| + |\theta_{B1}| = 90^\circ + \Delta m$. Hierin ist Δm ein von der Steigung der Bruchkurve im Berührungspunkt abhängiger Winkel $\Delta m = \arctan(\partial \tau_{nt} / \partial \sigma_n|_{\sigma_n, \tau_{nt}})$. Dieser Fall wurde mit +200 gekennzeichnet. Die gelbe Einfärbung in *Farbtafel 8/2* unten Mitte repräsentiert die Ausgabewerte 140 - 142, was Bruchwinkeln zwischen $\pm 40^\circ$ und $\pm 42^\circ$ entspricht. Im vorliegenden Fall wirkt die Drucklast in z-Richtung; es liegt demzufolge eine σ_3^d -Beanspruchung vor. Der Bruchwinkel berechnet sich daher nicht zu einem Wert von $\pm 49^\circ$, der sich für eine σ_2^d -Beanspruchung ergäbe, sondern zu $90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$.

8.3.2 Ergebnisse

Die aus dieser Optimierung resultierende Geometrie (Grobabmessungen der Prüfzone 10 mm x 10 mm x 15 mm) ist in *Bild 8/5* dargestellt. Nach Vorversuchen ergab sich eine Dehngeschwindigkeit von 1,25 %/min, um die geforderten Grenzen der quasistatischen Beanspruchung von 2 min $\pm$ 0,5 min bis zum Erreichen des Bruchs einzuhalten. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, wurde der Probekörper auf einer Zug/Druck-Prüfmaschine zwischen einer planen Druckplatte und einer Kugelkalotte beansprucht. Die Brüche traten reproduzierbar nach ungefähr 110 Sekunden ein.

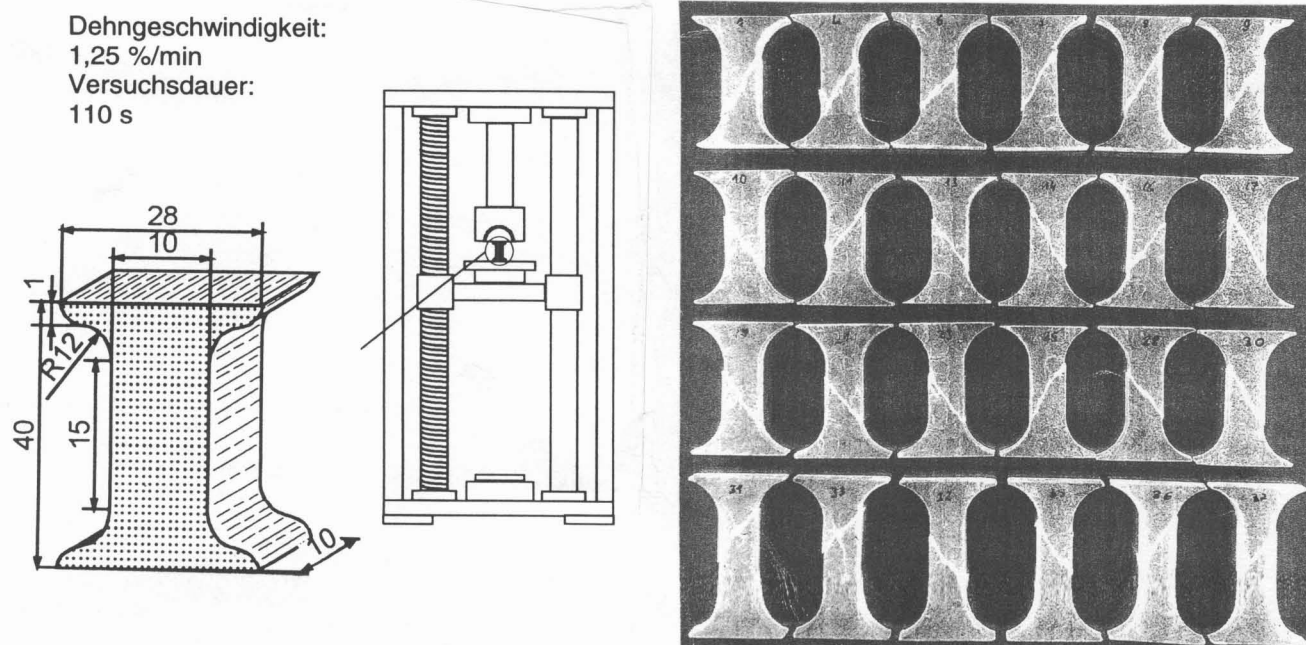


Bild 8/5: Bruchausbildung an den prismatischen Quer-Druckprobekörpern

Bei 25 der 30 geprüften Probekörper stellte sich im Meßbereich ein klar ausgeprägter, schräger Bruch ein. Der arithmetische Mittelwert des Bruchwinkels θ_B^d der ausgewerteten 25 Probekörper liegt bei $\pm 53,86^\circ$ mit einer Standardabweichung von $3,28^\circ$. In *Bild 8/5* ist die Vorderseite von 24 Probekörpern dargestellt. Gut zu erkennen ist, daß tatsächlich der gesamte ZFB in der Prüfzone eingetreten ist, so daß keine Rißinitiierung von den Krümmungsradien angenommen werden muß. Der Bruchverlauf entspricht demnach jenem, welcher durch das ZFB-Kriterium in der FE-Analyse vorausgesagt wurde.

8.3.3 Ermittlung von Modellparametern und Abhängigkeit der zugehörigen Werte von den Festigkeiten der Probekörper

Ermittlung der Modellparameter mit "parabolischem" Reibungsansatz:

Nach Kap. 3 kann bei parabolischem Druckspannungseinfluß und parabolischer Hüllkurve der Wirkebene-Bruchwiderstand $R_{\perp}^M$ über die Gl. (3.19) bestimmt werden. Aufgrund des gleichen Steigungsmaßes von Mohrschem Kreis und Hüllkurve im Berührungspunkt P läßt sich auch die Steigung $m_{\perp}^d$ an der Bereichsgrenze ($\sigma_n=0$) ermitteln,

$$R_{\perp\perp}^M = \frac{R_{\perp}^d}{2(1+|m_{\perp\perp}^d|)} \quad \text{mit } |m_{\perp\perp}^d| = -\frac{\cos 2\theta_B^d}{1+\cos 2\theta_B^d}, \quad (8.1)$$

sofern die Quer-Druckfestigkeit des Werkstoffs $R_{\perp}^d$ und der Bruchwinkel θ_B^d bekannt sind.

Die Auswertung erfolgt in den Schritten (vgl. *Bild 8/1*):

1. Berechnung des arithmetischen Mittels der i Bruchwinkel im Quer-/Druckfestigkeitspunkt
Gemessen: $\theta_B^d = 54^\circ \pm 3,3^\circ \Rightarrow \bar{\theta}_B^d = 54^\circ$.

2. Berechnung der Quer-Druckfestigkeit $\bar{R}_{\perp}^d$ als arithm. Mittel der gemessenen σ_{2B} -Werte

$$\bar{R}_{\perp}^d = 106 \text{ MPa} \pm 11 \text{ MPa} \rightarrow \bar{R}_{\perp}^d = 106 \text{ MPa}$$

3. Ermittlung des Steigungsmaßes nach Gl. 8.1.

$$|m_{\perp\perp}^d| = -\cos(2 \cdot 54^\circ) / (1 + \cos(2 \cdot 54^\circ)) = 0,45$$

4. Ermittlung des Bruchwiderstandes mit Gl. (8.1) an der Bereichsgrenze ($\sigma_n = 0$)

$$\bar{R}_{\perp\perp}^M = 0,5 \bar{R}_{\perp}^d / (1 + |m_{\perp\perp}^d|) = 0,5 \cdot 106 / (1 + 0,45) = 36,6 \text{ MPa}.$$

Bezüglich der Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^d$ muß an dieser Stelle angemerkt werden, daß der ermittelte Wert wohl deutlich zu gering ausfällt, da die problematische Herstellung der sehr dicken GFK-Balken im Faserwickelverfahren Auswirkungen auf die SV-Qualität hatte. Dies wird auch durch die sehr geringe Querzugfestigkeit der UD-Prismen von $\bar{R}_{\perp}^z \approx 15 \text{ MPa}$ belegt. Die an dem Rohrprobekörpern ermittelte Quer-Druckfestigkeit von $\bar{R}_{\perp}^d = 140 \text{ MPa}$ spiegelt die realen Festigkeitsverhältnisse der UD-GFK wider.

Ermittlung der Modellparameter mit "linearem" Reibungsansatz :

Die nachfolgend beschriebene Ermittlung der Modellparameter nach einem zweiten Modell (Pucks Basis-Modell nach Gl. (2.37)) soll verdeutlichen, daß Modellparameter prinzipiell nicht von einem Modell auf ein anderes übernommen werden dürfen.

Nach *Bild 8/1* und Gl. (2.38) gilt für jeden linearen Ansatz

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^d}{2} \left(\sqrt{1 + \mu_{\perp\perp}^2} - \mu_{\perp\perp} \right) = \frac{R_{\perp}^d}{2} \cotan \theta_B^d \quad \text{und} \quad |m_{\perp\perp}^d| = -\cotan 2\theta_B^d = \mu_{\perp\perp}. \quad (8.2)$$

Dies gilt dementsprechend auch für das *lineare* Reibungsmodell "Coulombsche Gerade" der Gl. (2.37). Aus der Spannungsinteraktion resultiert die *quadratische* Form der Gleichung.

Bild 8/6 zeigt die Testdaten der Quer-Druckproben und die Auswertung für die Mittelwerte. Im *Bild 8/6* ist exemplarisch auch für den Probekörper Nr. 33 der Mohrsche Druckkreis angedeutet.

Die Auswertung erfolgt in den Schritten:

1. Berechnung des Mittelwertes der Steigung $\bar{m}_{\perp\perp}^d$ aus dem arithmet. Mittel der Bruchwinkel

$$\bar{m}_{\perp\perp}^d = \bar{\mu}_{\perp\perp} = -\cotan(2 \cdot 54^\circ) = 0,32.$$

2. Berechnung des Mittelwertes ($\bar{\sigma}_n^d = 36,7 \text{ MPa}$; $\bar{\tau}_n = 50,0 \text{ MPa}$) aus den getrennt gemittelten Mohrschen Spannungen σ_n , τ_{nt} bei Bruch (näherungsweise erlaubt).
3. Ermittlung des Bruchwiderstandes im Quer-Druckfestigkeitspunkt.

$$\bar{R}_{\perp\perp}^A = \bar{R}_{\perp\perp}^M = \bar{\tau}_{nt}^d + \bar{\mu}_{\perp\perp} \bar{\sigma}_n^d$$

$$= 50,0 \text{ MPa} + 0,32(-36,7 \text{ MPa}) = 38,5 \text{ MPa}$$

Den gleichen Wert liefert natürlich auch Gl. (8.2).

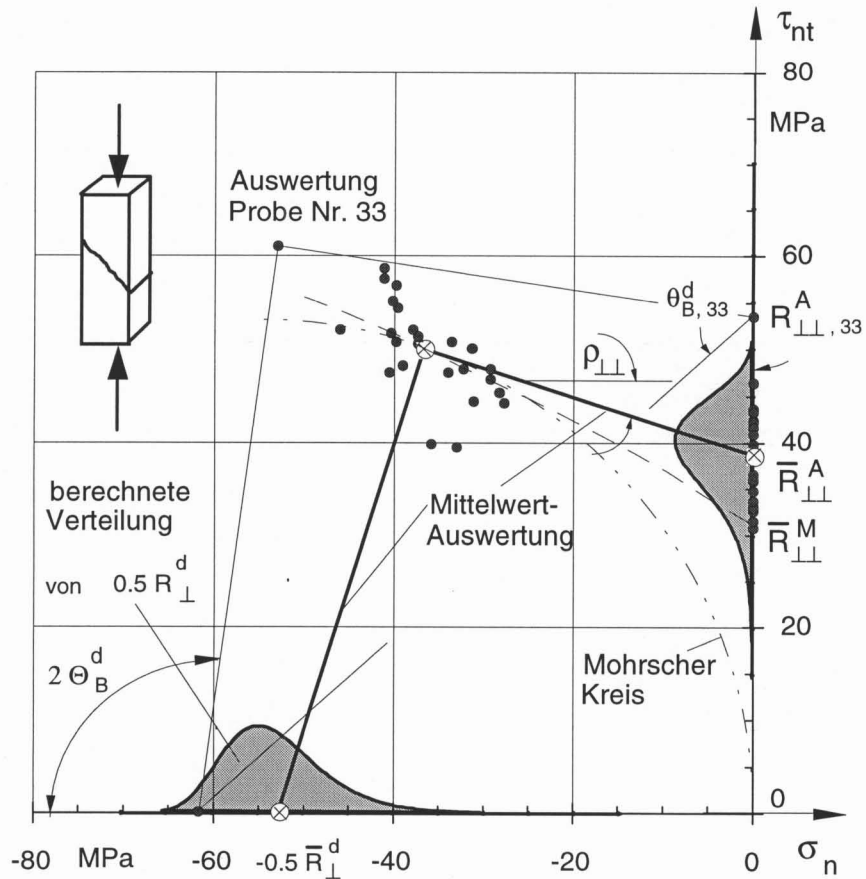


Bild 8/6: Auswertung der prismatischen Quer-Druckproben mit "linearem" Reibungs-Ansatz gemäß Gl. (2.37). ($\rho_{\perp\perp}$: = Reibungswinkel)

9 DER TORSIONSRING (τ_{32} , τ_{31} , θ_B) [DH, JK]

Zielsetzung

- Untersuchung unterschiedlicher Spannungscombinationen (τ_{32} , τ_{21}) zwecks Verifikation der Hypothese (H II').
- Ermittlung des jeweils zugehörigen Bruchwinkels und Vergleich mit der Vorhersage.

9.1 Verifizierungsweg

Das Einleiten von Schubbeanspruchungen wird üblicherweise mit Hilfe von sog. Schubrahmen (DIN 53399), dem "Rail-Shear-Test" oder durch Torsion zylindrischer Probekörper realisiert. Mit steigendem Anisotropiegrad wird das Einleiten einer reinen Schubbeanspruchung in einen Werkstoff immer schwieriger [Tar81, Ada94]. Schubrahmen und insbesondere der sog. Rail-Shear-Test führen aufgrund von notwendigen Klemmspannungen, Beulneigung und freien Rändern zur Ausbildung erheblicher Störspannungen.

Durch Torsion eines umfangsgewickelten zylindrischen Probekörpers können Quer/Längs-Schubspannungen (τ_{31} oder τ_{21}) erzeugt werden. Zum Erzeugen von Quer/Quer-Schubbeanspruchungen (τ_{23} oder τ_{32}) in einem tordierten zylindrischen Probekörper müßten die Fasern in Dickenrichtung angeordnet sein, was fertigungstechnisch nicht realisierbar ist.

Basierend auf diesen Überlegungen entwickelte *Puck* das Konzept, die Enden eines ebenen Elements zu einem Ring zu schließen, der durch zwei mit ihm fest verbundene und sich gegeneinander verdrehende Ringe schubbeansprucht wird (*Bild 9/1*).

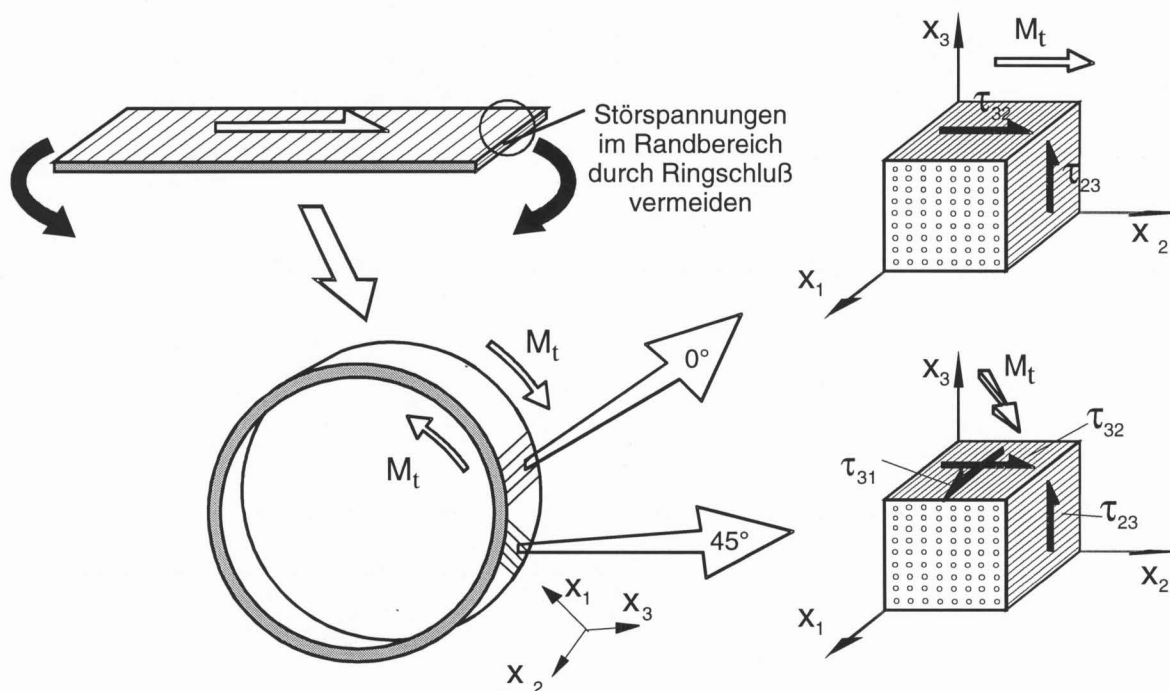


Bild 9/1: Konzept des Torsionsringversuchs mit einer UD-Schicht

Mittels eines solchen Torsionsrings können einzelne Punkte einer Bruchkurve durch Variation der Faserorientierung angefahren werden. In *Bild 9/2* ist die (τ_{31} , τ_{32})-Bruchkurve wiedergegeben.

Da τ_{31} und τ_{32} in einer gemeinsamen Ebene wirken, fällt der Bruchwinkel von 90° bei reinem τ_{31} auf 45° bei reinem τ_{32} ab und steigt dann spiegelsymmetrisch wieder auf 90° bei reinem (negativem) τ_{31} an.

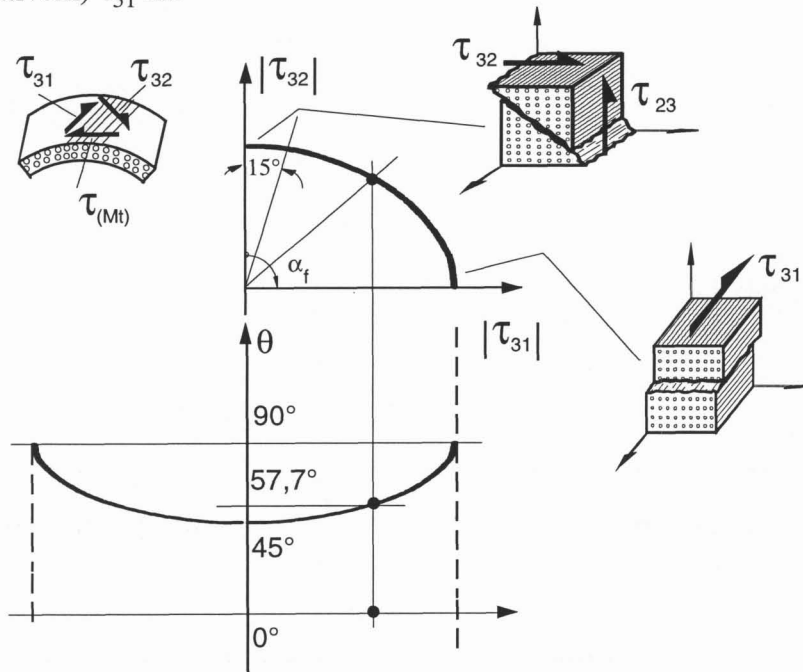


Bild 9/2: (τ_{32}, τ_{31}) -Bruchkurve

9.1.1 Analyse des Spannungszustands [LK]

Bei der praktischen Versuchsdurchführung können neben den reinen Schubspannungen τ_{32} , τ_{31} infolge der geometrischen Nichtlinearität zusätzlich negative radiale und tangentiale Spannungen auftreten. Diese Störspannungen werden dabei durch die Behinderung der Radialverschiebung u_r induziert, wogegen die eigentliche Tangentialverschiebung u_φ durch die Lastspannungen $\tau_{r\varphi}$ ($\tau_{r\varphi} = \sqrt{\tau_{32}^2 + \tau_{31}^2}$) erzeugt werden. Zur Ermittlung der Radialverformung dient als Berechnungsmodell ein 0° -verstärkter Ring mit dem Innendurchmesser $d_i = 36$ mm und der Wanddicke $s = 3$ mm (Werkstoffkennwerte siehe Tab. 6/2). Der Torsionsring wird am Innenmantel mit der Schubspannung $\tau_{32i} = 100$ MPa belastet (vgl. Bild 9/1).

Nach Kauderer [Kau58] hat die klassische (linearisierte) Mechanik Gültigkeit, wenn die Verschiebungsableitungen $< 0,5$ % sind. In dem hier betrachteten Fall folgt aus

$$u'_\varphi(r) = \frac{\tau_{32i}}{G_{\perp\perp}} \left(\frac{r_i}{r_a} \right)^2 \left(1 + \frac{r_a^2}{r_i^2} \right)$$

die maximale Verschiebungsableitung am Innenrand ($r = r_i$) zu $u'_{\varphi\max} = 1,5$ %. Demnach ist hier die Anwendung der nichtlinearen Mechanik notwendig.

Die wesentlichen Ergebnisse der am 0° -Torsionsring durchgeführten analytischen und numerischen Berechnungen sind in Tab. 9/1 a zusammengestellt.

Die infolge geometrischer Nichtlinearität induzierten negativen Radial- und Umfangs-Störspannungen führen zu Veränderungen der örtlichen Anstrengung von $D_i = 0,49$ % am Innenrand

Tab. 9/1 a: Ergebnisse analytischer und numerischer Berechnungen

Berechnungs- methode	Schub- belastung in MPa τ_{23i}	Verschiebung in 10^{-2}mm $u_{\varphi i}$	Radial- spannungen in MPa		Tangential- spannungen in MPa		Anstrengung in % $\theta_B = 45^\circ$	
			σ_{ri}	σ_{ra}	$\sigma_{\varphi i}$	$\sigma_{\varphi a}$	$D_i(\theta_B)$	$D_a(\theta_B)$
Analytisch linear	100	5,349	0	0	0	0	0	0
FEM linear	100	5,351	0	0	0	0	0	0
nichtlinear	100	5,352	-2,37	-2,99	-1,85	-1,19	0,49	1

auf $D_a = 1\%$ am Außenrand. Damit liegt die aus den tatsächlich herrschenden Störspannungen resultierende max. Anstrengung von 1% am Außenrand unter dem vereinbarten Grenzwert von 5% .

Bei einem Torsionsring mit schräger Faserlage ($\alpha \neq 0^\circ, 90^\circ$) lassen sich kombinierte Spannungszustände τ_{32} und τ_{31} verwirklichen. In diesem Fall tritt hinsichtlich der Stoffgleichungen keine Kopplung der eingeleiteten Schubspannungen mit den weiteren Spannungen auf; es ist jedoch eine räumliche Kopplung aller Spannungen durch die Gleichgewichtsbedingungen zylindrischer Körper vorhanden. Die hierzu durchgeführten räumlichen FE-Rechnungen zeigen, daß auch hier für den ausgewählten Probekörper derartige Störeinflüsse infolge der Koppeleffekte von untergeordneter Bedeutung sind.

9.1.2 Qualitative Untersuchungen

Die Realisierung eines solchen Versuchs erfolgt durch die Verbindung des dünnwandigen UD-FKV-Rings mit einer metallischen Nabe innen sowie einem metallischen Außenring, welche gegeneinander tordiert werden. Zu diesem Zweck wurde der in *Bild 9/3* dargestellte Versuchsaufbau entwickelt.

Für reine τ_{32} -Spannung, d.h., die Prüfschicht besteht aus UD-FKV mit axialer Faserausrichtung, wird der Bruchwinkel zu 45° berechnet, sofern Modell #1 mit den in Tab. 6.2 definierten Basisfestigkeiten und den Steigungen $m^{z,d} = 0,15$ zugrunde gelegt wird. Die in diesem Vorversuch erzeugten ZFB weisen etwa 5° kleinere Bruchwinkel auf, was überwiegend auf eine Störung des reinen τ_{32} -Spannungszustands zurückgeführt werden kann. Die Störspannungen resultierten aus der Kräfteinleitung über eine quadratische Nabenöffnung und der 3-Punkt-Gegenlagerung am Außenring, sowie einer nicht querkraftfreien Einleitung des Torsionsmoments über einen Hebelarm auf einer konventionellen Zug/Druck-Prüfmaschine.

Ein Vergleich mit Bruchwinkeln, die mit derselben Versuchsanordnung aber einer Faserorientierung von 45° erzeugt wurden, bestätigt die Aussage des ZFB-Kriteriums qualitativ. Mit der 45° Fa-

serorientierung gegenüber der Axialrichtung wird ein ($\tau_{32} = \tau_{31}$)-Spannungszustand erzeugt, der zu einem berechneten Bruchwinkel von $\theta_B = 58^\circ$ führen soll, sofern Modell #1 mit den in Tab. 6.2 definierten Basisfestigkeiten ($m^{z,d} = 0.15$) zugrunde gelegt wird. Der Bruchwinkel der ZFB im 45° -Torsionsring muß also deutlich größer als derjenige am 0° -Torsionsring sein, was durch Bild 9/4 bestätigt wird.

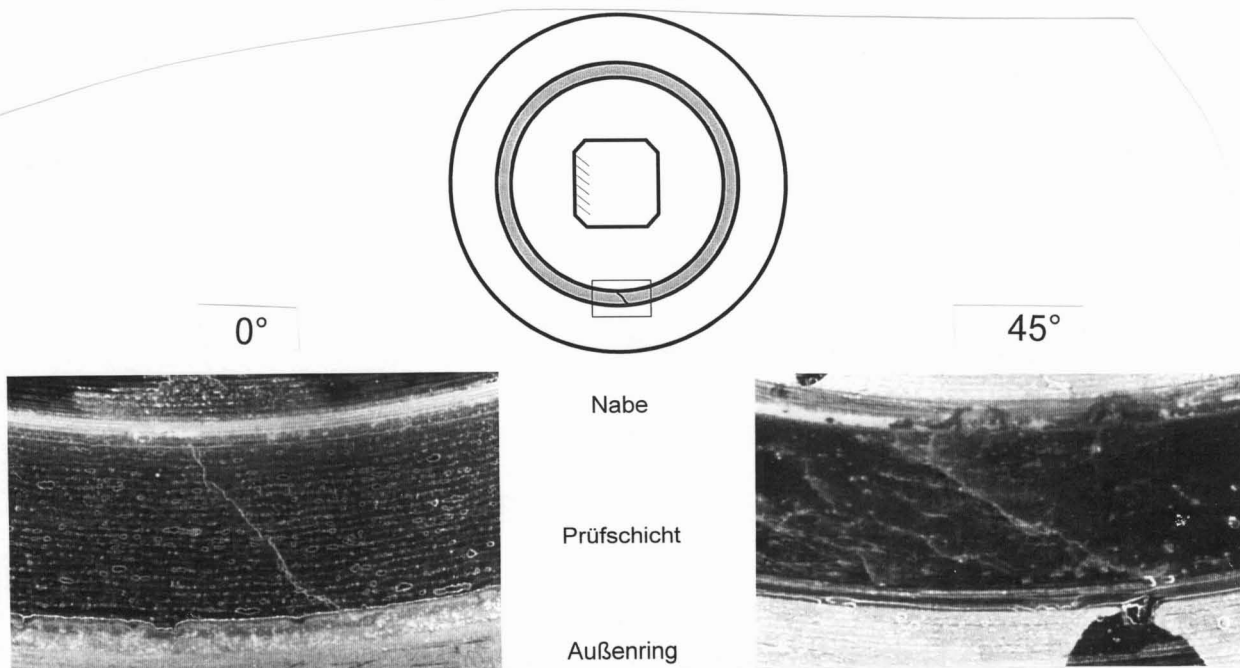
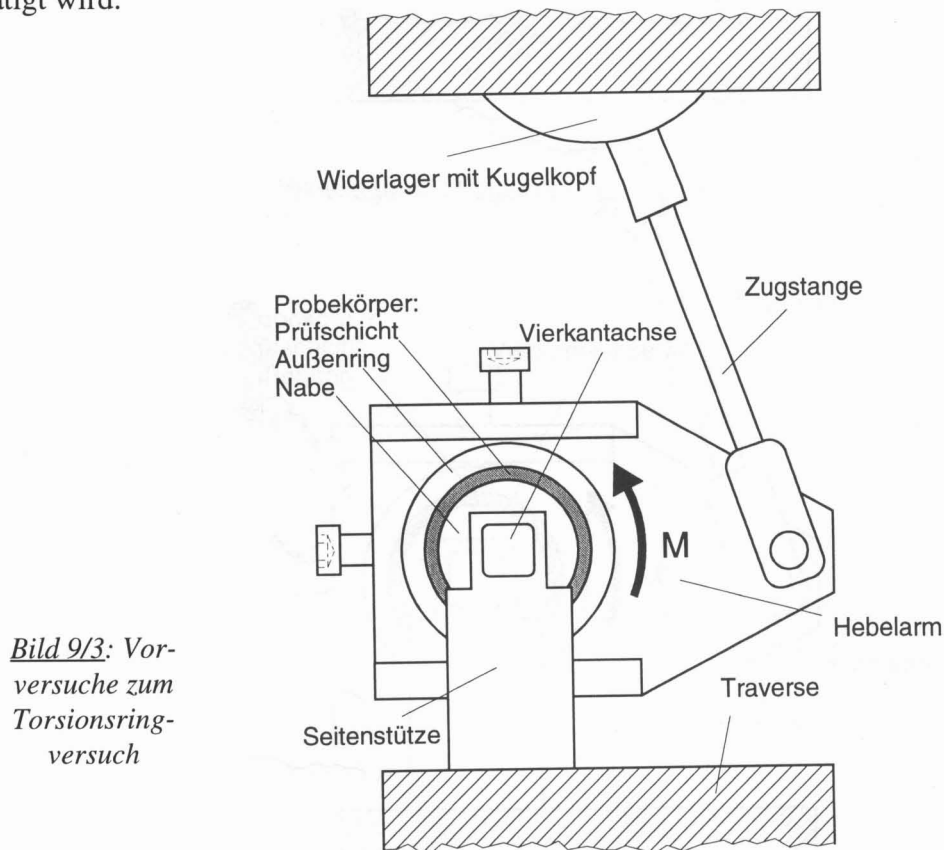


Bild 9/4: ZFB in der 0° - und 45° -Prüfschicht eines Torsionsrings

9.2 Erste Entwicklungsstufe: Auslegung, Bruchwinkelmessung, Ergebnisdiskussion

Auslegung des Probekörpers

Die Aussage des ZFB-Kriteriums konnte bereits tendenziell bzw. qualitativ für Kombinationen von Quer/Längs- und Quer/Quer-Schubspannungen durch die Vorversuche bestätigt werden. Im Zuge dieser Untersuchungen auf der Zug/Druck-Prüfmaschine traten allerdings erhebliche Störspannungen auf, die die in Kapitel 6 geforderten Beschränkungen bezüglich eines homogenen Spannungszustands in der Prüfzone bzw. Prüfschicht überschreiten. Vor allem durch eine homogenere Momenteneinleitung wurde eine deutliche Verbesserung der Prüftechnik erhofft.

Die in *Bild 9/4* gezeigten ZFB treten bereits bei etwa einem Drittel der rechnerisch ermittelten Bruch-Torsionsbelastung auf. Dies kann auf eine relativ schlechte SV-Qualität, vor allem jedoch auf das Auftreten der beschriebenen Störspannungen zurückgeführt werden. Für die in diesem Kapitel beschriebene Entwicklung von Versuchen zur Ermittlung von ZFB-Bruchwinkeln wurde daher ein neuer Probekörper ausgelegt, der – ohne Hebelarm – auf einer, direkt ein Torsionsmoment erzeugenden Z/D-T-Prüfmaschine geprüft wird. Eine erheblich homogenere Einleitung des Torsionsmoments in den Probekörper erfolgt über eine innere und äußere Verzahnung (*Bild 9/5*).

Eine bessere SV-Qualität und ein größerer Durchmesser zur Verringerung der Abweichung der Bruchgefahr innerhalb der Prüfschicht kann für zylindrische Geometrien besser im Faserwickelverfahren als mit Prepregs erreicht werden. Zur Vermeidung von Störspannungen muß bei Faserorientierungen $\alpha_f > 0^\circ$ beachtet werden, daß das axiale Verformungsbestreben des Probekörpers, welches daraus resultiert, daß sich die Richtung der äußeren Belastung nicht mit der Richtung der Orthotropieachsen deckt, ungehindert erfolgen kann. Dies kann auf der Z/D-T-Prüfmaschine berücksichtigt werden.

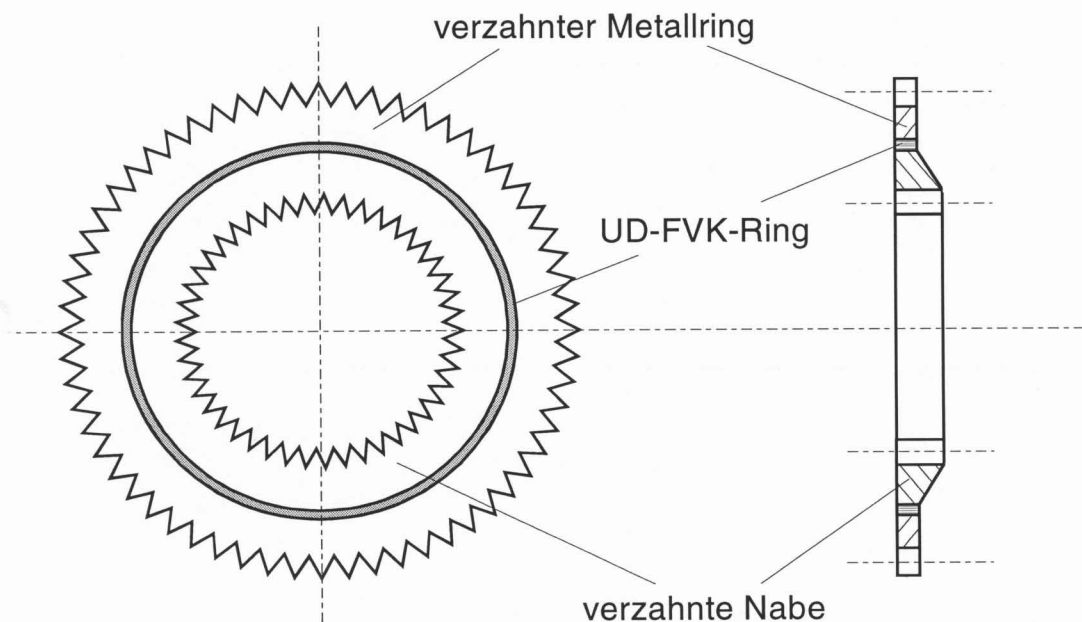


Bild 9/5: Torsionsringprobekörper für eine Z/D-T-Prüfmaschine

Die zur Verfügung stehende Z/D-T-Prüfmaschine kann ein maximales Torsionsmoment von 3400 Nm aufbringen. Aus fertigungs- und handhabungstechnischen Gründen sollte die Prüfschicht nicht unter 5 mm breit sein. Der maximale, noch prüfbare Außendurchmesser wurde darauf basierend zu 80 mm ermittelt, was allerdings zu einer Abweichung der Bruchgefahr von ca. 10% innerhalb der 2 mm dicken Prüfschicht führt; damit konnte die geforderte Schranke von 5% nicht eingehalten werden. Aufgrund des kleineren Durchmessers ist die Verbindung Nabe-Prüfring problematischer als die Verbindung Außenring-Prüfring. Es wurden verschiedene Verbindungstechniken untersucht, wobei sich letztendlich eine Klebeverbindung als am vorteilhaftesten bewährte. Die Festigkeit der Klebeverbindung von Nabe und Prüfring konnte, vermutlich hauptsächlich aufgrund von Fertigungsungenauigkeiten bei der mechanischen Bearbeitung des Prüfrings, für diese Probekörper nicht soweit optimiert werden, daß ein zur Erzeugung von ZFB notwendiges Torsionsmoment eingeleitet werden konnte. Es mußte deshalb eine Nut in den Prüfring eingestochen werden (*Bild 9/6*, links). Die Querschnittsgeometrie ist damit derjenigen des zuerst besprochenen Querdruckprismas ähnlich (vgl. *Bild 8/3*).

Die Homogenität hinsichtlich SV-Qualität und Momenteneinleitung ist bei diesem Probekörper so hoch, daß er gleichzeitig an vielen Stellen ZFB erleidet und daraufhin am gesamten Umfang auseinanderreißt, was eine Auswertung der Bruchwinkel verhindert. Es wurden daher nachträglich Stützstellen geschaffen, indem an einigen Stellen des Umfangs der Querschnitt mit Hilfe von in die Nut eingebrachtem Klebstoff wieder vergrößert wurde (*Bild 9/6*, rechts) [Hus95].

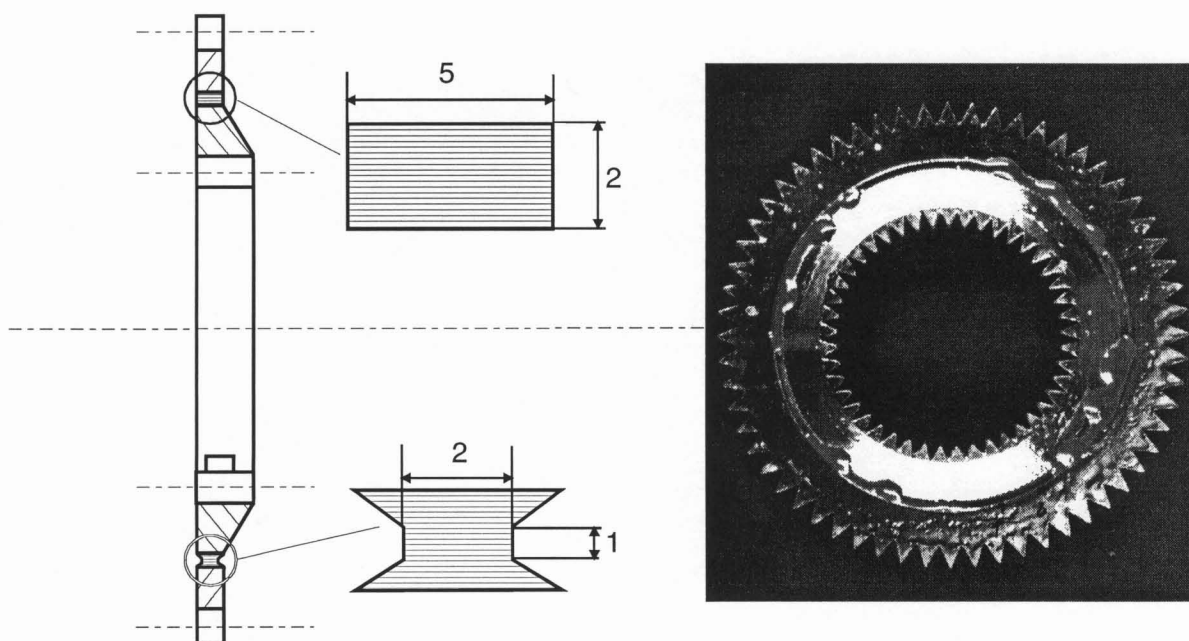


Bild 9/6: Torsionsring-Probekörper mit eingestochener Nut

Auswertung der Bruchwinkel

Die Auswertung der Bruchwinkel erfolgte unter einem konventionellen Mikroskop. Bei der Bruchwinkelbestimmung muß beachtet werden, daß der an der Oberfläche sichtbare Riß unter ei-

nem anderen Winkel verläuft, als der in der (x_2, x_3) -Ebene definierte Bruchwinkel θ_B . Diese Referenzebene steht stets senkrecht zu den Fasern (Bild 9/7). Unter der Annahme, daß der Bruch im gesamten Probekörper in derselben faserparallelen Ebene verläuft, findet man die Beziehung:

$$\tan \theta_B = \tan \delta_{\text{RiB}} \cdot \cos \alpha_f \quad . \quad (9.1)$$

Hierin ist δ_{RiB} der Bruchwinkel des ZFB, der an der Stirnfläche des Torsionsrings sichtbar wird. Mit Relation (9.1) und makroskopischen Aufnahmen der vollständigen Torsionsringe lassen sich die Bruchwinkel auswerten, ohne daß die Prüfschicht von den Verzahnungen getrennt werden muß, um ein Schliffbild senkrecht zu den Fasern erhalten zu können.

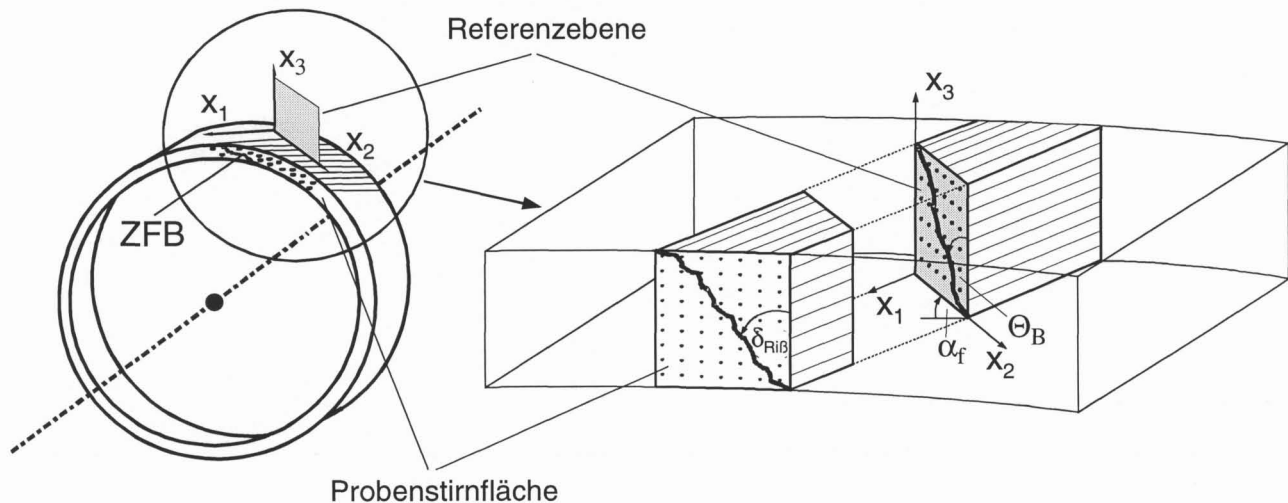


Bild 9/7: Geometrische Zusammenhänge bei der Bruchwinkelbewertung

Diskussion der Ergebnisse

Es wurden 8 dieser Probekörper mit $\alpha_f = 45^\circ$ geprüft und dabei insgesamt 25 ZFB erzeugt, von denen angenommen werden kann, daß sie einander nicht gegenseitig beeinflussten. Gefunden wurden Bruchwinkel im Bereich 45° bis 69° . Der mittlere Bruchwinkel ergibt sich zu 58° bei einer Standardabweichung von $5,5^\circ$. Rechnerisch ergibt sich der Bruchwinkel θ_B zu $57,7^\circ$, wobei zu beachten ist, daß bereits eine Erhöhung des angenommenen Wirkebene-Bruchwiderstands $R_{\perp}^z$ um nur 3 MPa (= 5%) zu einem rechnerischen Bruchwinkel von 62° führt, der Bruchwinkel hier also sehr empfindlich auf Änderungen des Verhältnisses der Bruchwiderstände zueinander reagiert. In Bild 9/8 sind beispielhaft vier der 25 ausgewerteten ZFB abgebildet.

9.3 Zweite Entwicklungsstufe: Vertiefte Analyse und Ergebnisse

Zur weiteren Optimierung des Probekörpers mußte eine detaillierte Spannungsanalyse mittels eines FE-Analyse-Programms durchgeführt werden. Als Zielsetzung für diese Entwicklungsstufe galt es bei deutlich breiterer Prüfzone (erste Entwicklungsstufe $b=1\text{mm}$) im gesamten Prüfbereich eine annähernd konstante Anstrengung zu erzeugen. Wie schon bei den UD-Prismen kam auch hier das im FEM-Programm implementierte ZFB-Kriterium zur Anwendung.

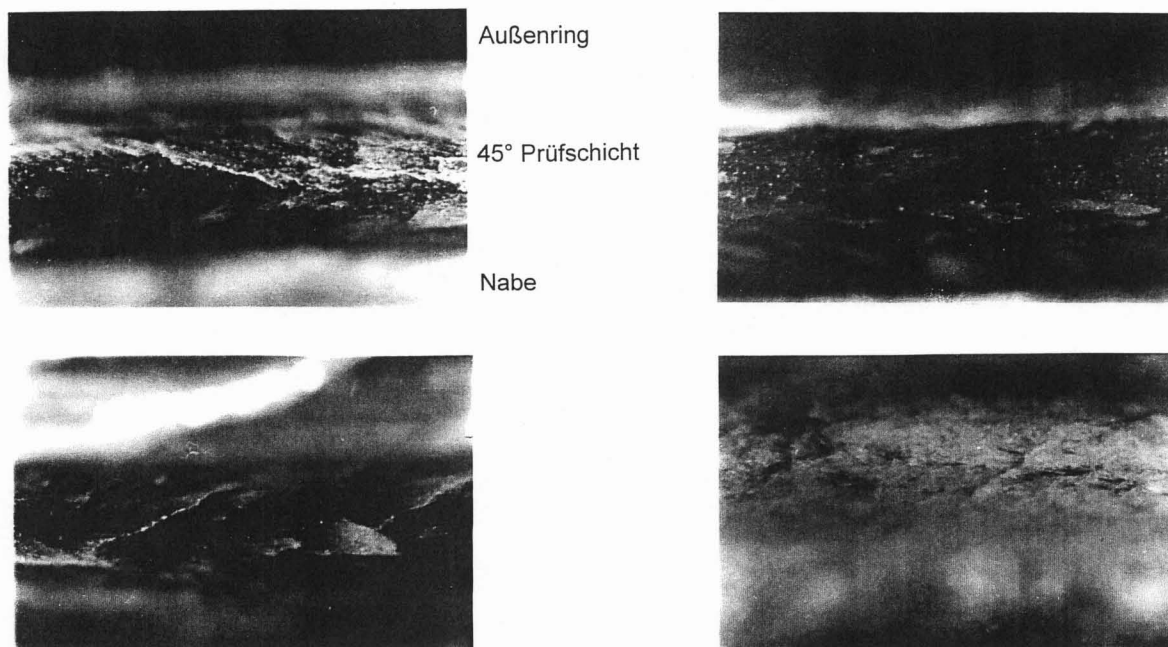


Bild 9/8: Bruchbilder von 45°-Torsionsprobekörpern der ersten Entwicklungsstufe

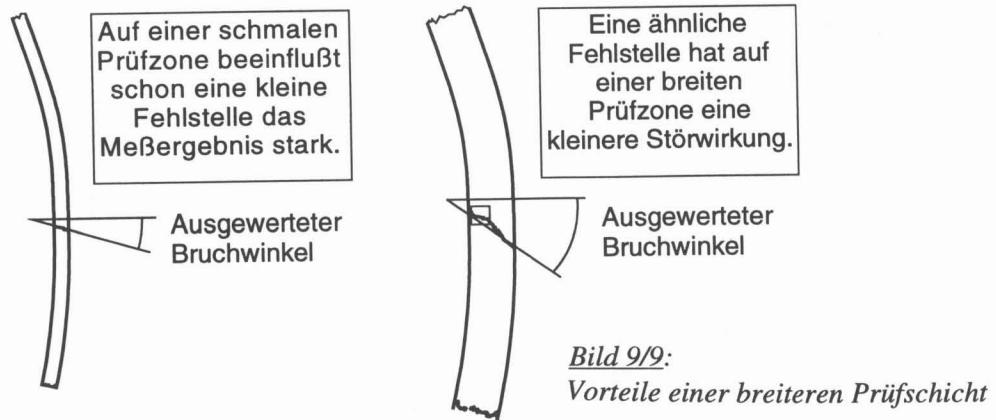
Der letzte experimentell untersuchte Torsionsring hatte, wie in der Isofarben-Darstellung auf *Farbtafel 9/1* zu erkennen, eine ungleichmäßige Verteilung der Anstrengung über der Prüfzone (Skalierung von $A = 0$ bis 1). Die Hauptursachen für diese Verteilung sind

- einerseits die Kanten der Einkerbung, die einen ungünstigen Kraftfluß verursachen, welcher die Prüfschicht lokal schwächt, und
- andererseits die Übertragung der Schubspannungen durch ein konstantes Torsionsmoment auf zylindrische Flächen. Diese Mantelflächen werden - bei konstanter Dicke d - zwangsläufig mit zunehmendem Radius r größer.

Um die Schubspannung auf der ganzen Breite des Prüfrings annähernd konstant zu halten, muß die Ringdicke d damit indirekt proportional zu r_2 sein. Entsprechend müssen obere und untere Oberflächen der Prüfzone leicht konisch gestaltet werden (*Farbtafel 9/2*), d.h., die Prüfzone ist innen dicker als außen.

Diesem Konzept folgend, wurden die Torsionsringe optimiert: Die neue Prüfschicht ist in radialer Richtung wesentlich breiter als die der ersten Entwicklungsstufe, was vor allem der Breite der Prüfzone zugute kommt (*Farbtafel 9/2*). Damit hat der Einfluß von Fehlstellen auf die Bruchausbildung für die neue Querschnittsgeometrie deutlich geringere Auswirkungen. Der gemessene mittlere Bruchwinkel ist entsprechend weniger stark beeinflusst von kleinen Ablenkungen, durch Luftein schlüsse oder von anderen Schwachstellen (*Bild 9/9*).

Der *Farbtafel 9/2* ist weiterhin zu entnehmen, daß - bedingt durch den konischen Querschnittsverlauf - über der gesamten Prüfzone eine annähernd konstante Anstrengung vorliegt. Zudem wurde die innere Fläche des Ringes breiter als die äußere ausgelegt, um die innere Klebstoffhaftschrift zu entlasten.



Diskussion der Ergebnisse

Als Faserorientierung der UD-FKV-Prüfschicht der zweiten Versuchsreihe wurde zunächst 15° gewählt; kleinere Faserwinkel ließen sich aufgrund von Problemen beim Trennen von GFK-Rohr und Kern nicht realisieren. Trotz der von $\alpha_f = 0^\circ$ abweichenden Faserorientierung, tritt nahezu ein reiner Quer/Quer-Schubspannungszustand auf, welcher durch eine um 30% geringere Bruchlast gegenüber dem $\alpha_f = 45^\circ$ Torsionsringversuch gekennzeichnet ist. Der rechnerische Bruchwinkel ergibt sich nach [BRU96] zu $\theta_B = 46^\circ$, sofern Modell #1 mit den in Tab. 6.2 definierten Basisfestigkeiten ($m^{z,d} = 0,15$) zugrunde gelegt wird.

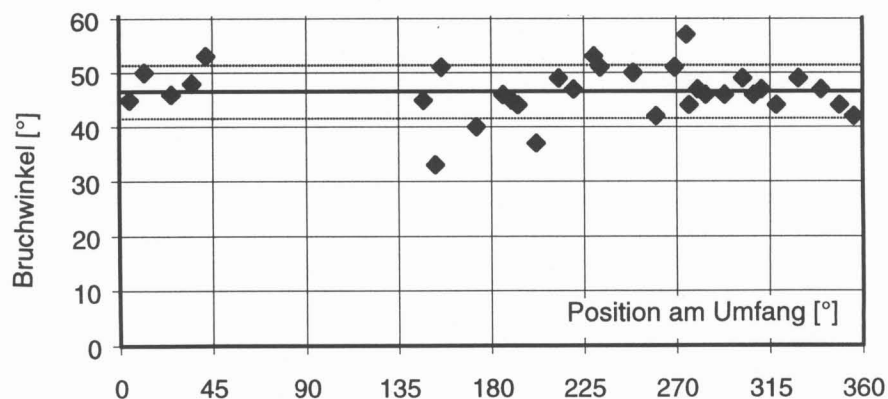


Bild 9/10: Position und Betrag von θ_B eines Torsionsringversuchs mit $\alpha_f = 15^\circ$, $\tau_{32}/\tau_{31} = 3,7$

Eine graphische Aufbereitung des Ergebnisses eines Torsionsringversuchs dieser Prüfreihe zeigt *Bild 9/10*. Im Diagramm symbolisiert jeder Punkt einen ZFB. Die Rißlage bestimmt die x- und der Bruchwinkel die y-Koordinate. Die dicke Linie entspricht dem Mittelwert der Bruchwinkel des Probekörpers; die feinen Strichlinien entsprechen der Standardabweichung von diesem Mittelwert. Zwischen diesen Werten befinden sich, falls die Werte Gauß-normalverteilt sind, 66% der ZFB. Gesamtmittelwert der Bruchwinkel ist 45° , bei einer Standardabweichung von $6,6^\circ$. Das Balkendiagramm in *Bild 9/11* stellt für vorgegebene Klassenbreite die Verteilung der 166 ausgewerteten Bruchwinkel als Histogramm dar. Ebenfalls im Bild eingetragen ist die Dichtefunktion der Gauß-Normalverteilung für die geschätzten statistischen Parameter $\sigma = 6,6^\circ$ und Erwartungswert $\mu = 45^\circ$.

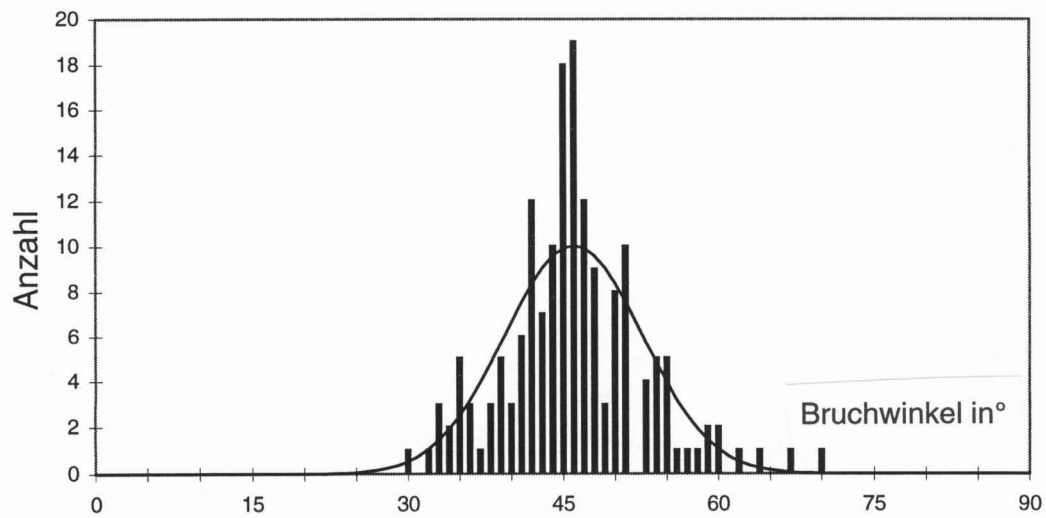
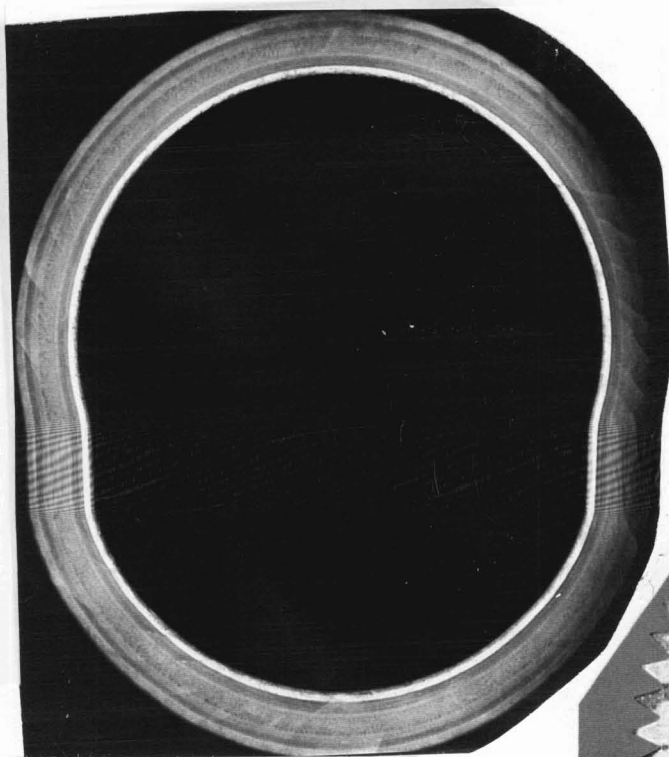


Bild 9/11: Histogramm der Bruchwinkel und zug. Gauß-Normalverteilung

Bild 9/12 zeigt abschließend exemplarisch die ZFB eines geprüften Torsionsrings.



Durchleuchtung

Diffusionsfarbe

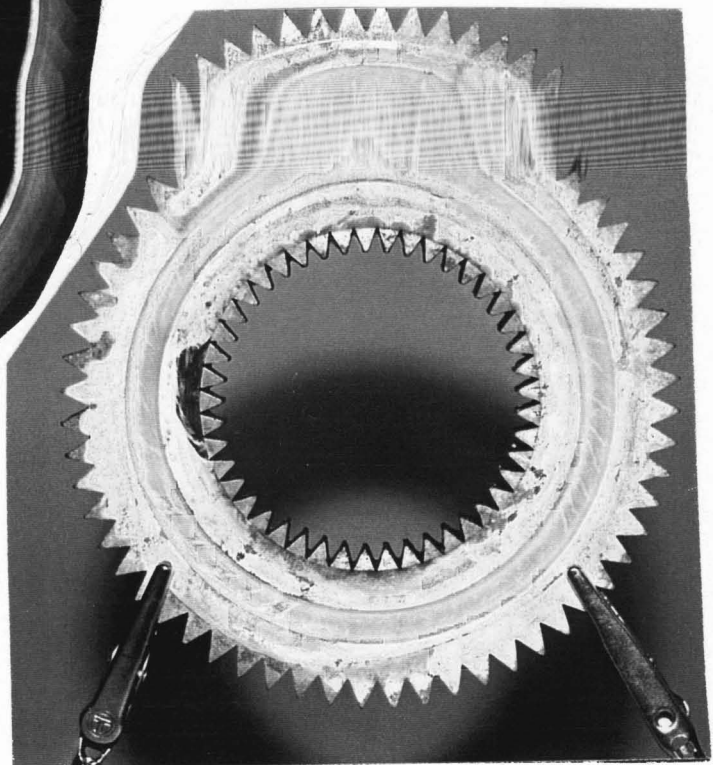


Bild 9/12: Auftreten mehrerer ZFB an einem 15°-Torsionsring

10 DER GESCHICHTETE GERADE BIEGETRÄGER ($\sigma_2, \tau_{23}, \theta_B$) [DH, JK]

Zielsetzung: Ermittlung des Bruchwinkels für verschiedene Spannungscombinationen

10.1 Überlegungen zur Spannungsverteilung

Isotroper Biegebalken

Sofern für die Spannungsbetrachtung in einem isotropen Biegebalken die Technische Biegelehre zugrunde gelegt werden kann, beschränkt sich der recht komplexe im Balken vorherrschende räumliche Spannungszustand auf die für die Durchbiegung relevanten Spannungen σ_x in Balkenlängsrichtung und τ_{zx} im Balkenquerschnitt (*Bild 10/1*) [Sza84]. Diese Vereinfachung kann jedoch nur für die Durchbiegung gerader schlanker Balken ($b/h \leq 0,5$) mit konstantem Querschnitt bei kleinen Verformungen angewendet werden.

Für den isotropen Biegebalken mit über dem Querschnitt konstanten Moduln E_x und G_{zx} ergeben sich bei Drei-Punkt-Biegung die Spannungszustände gemäß *Bild 10/1*.

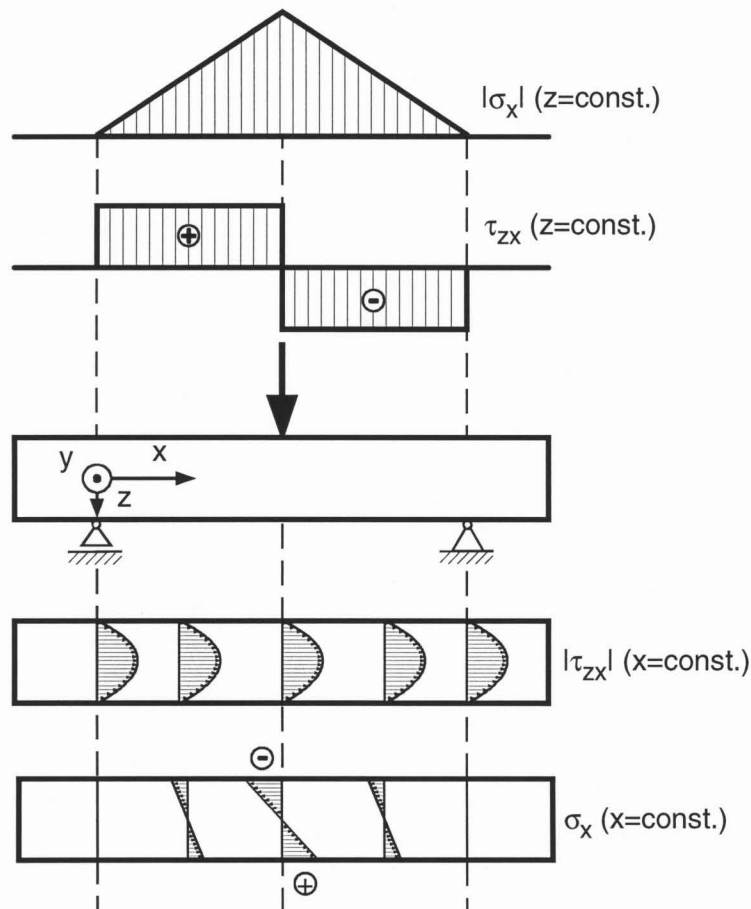


Bild 10/1: Spannungsverteilung im isotropen Dreipunkt-Biegebalken (techn. Biegelehre)

Die Biegenormalspannungen wirken in Balkenlängsrichtung; sie sind im Punkt der Auflager Null und wachsen linear zu einem Zugzone/Druckzone-Profil mit maximaler Ausprägung am Kräfteinleitungspunkt bei $x = l/2$ für $z = \pm h/2$ an. Demgegenüber ist das parabelförmige Profil der

Schubspannungen betragsmäßig über der Länge des Balkens konstant. An der Ober- und Unterseite bei $z = \pm h/2$ ist τ_{zx} gleich Null.

Verbundbiegebalken

Für einen aus mehreren Schichten mit unterschiedlichen E_x und G_{zx} -Moduln aufgebauten Biegebalken ergeben sich andere Spannungsverläufe. In [Pes92] wird die Normal-Spannungsverteilung für Verbundbiegebalken hergeleitet. Eine schichtenweise Schub-Spannungsberechnung ist in [Puc92] angegeben. Das Bild 10/2 zeigt die Dehnung ϵ_x und die Normal- sowie Schubspannungsverteilung für Schnitte mit $x = \text{konst}$ in Biegeträgern, die neben dem Grundwerkstoff eine Schicht mit einem niedrigeren E-Modul besitzen. Ist der Biegeträger symmetrisch aufgebaut, so liegt die Neutrale Faser in der Mitte eines jeden Längs- und Querschnitts durch den Balken. Bei unsymmetrischen Schichtanordnungen verschiebt sich die Neutrale Faser in die "steifere Hälfte".

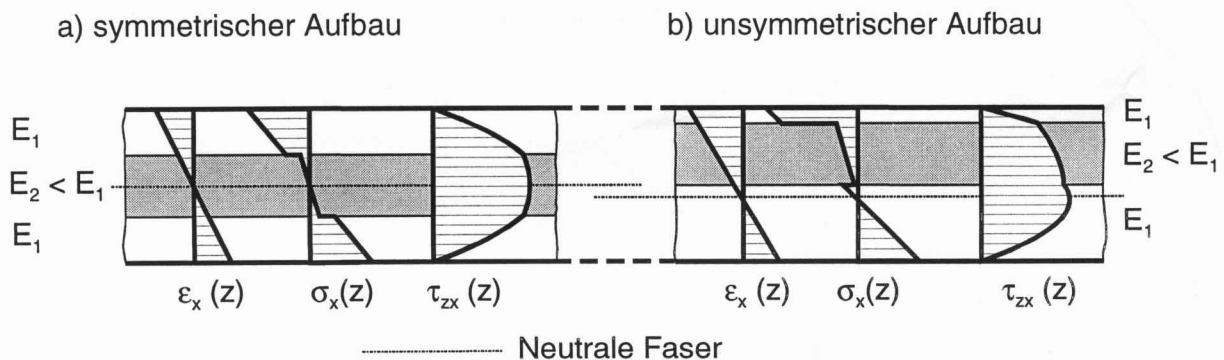


Bild 10/2: Dehnungs- und Spannungsverteilung in Verbundbiegebalken ($E_2 < E_1$)

Zur Berechnung der in den unterschiedlichen Schichten eines Verbundbiegebalkens herrschenden Spannungen σ_x und τ_{zx} wurde ein auf der Technischen Biegelehre basierendes Programm entwickelt [Ahr94]. Für eine an einer beliebigen Stelle x aufgebrachte Last F werden für eine gewünschte Anzahl von Positionen x_i die Spannungen σ_x und τ_{zx} in bis zu fünf Schichten mit unterschiedlichen Schichtsteifigkeiten berechnet. Die Spannungen werden sowohl für die Ober- und Unterseite als auch für die Mitte einer jeden Schicht und zusätzlich in der Neutralen Faser berechnet.

Konzept eines Probekörpers für (σ_2, τ_{23}) -Beanspruchungen

Die obigen Darstellungen der Spannungsverteilung zeigen, daß im allgemeinen in jedem Punkt eines Biegebalkens ein anderer Spannungszustand herrscht. In einem FKV-Biegebalken aus 0° - und 90° -Schichten treten die "Biegespannungen" σ_x und τ_{zx} in den einzelnen Schichten in unterschiedlicher Form auf. Sie wirken in einer 0° -Schicht, d.h. Schichten mit Faserorientierung in Balkenlängsachse, als Längs-Normalspannung σ_1 bzw. Quer/Längsschubspannung τ_{31} und in einer 90° -Schicht, deren Fasern entsprechend in Breitenrichtung orientiert sind, als Quer-Normalspannung σ_2 bzw. Quer/Quer-Schubspannung $\tau_{32} = \tau_{23}$ (Bild 10/3). Durch geeignete Positionierung einer 90° -Prüfschicht (PS) innerhalb der Höhenabmessung des Biegebalkens, können folglich kombinierte (σ_2, τ_{23}) -Spannungszustände realisiert werden. Wird eine solche Prüfschicht zwischen zwei 0° -

Stützschichten angeordnet, so tritt in der Prüfschicht ZFB bei Belastungen auf, die für das Versagen des gesamten Biegebalkens unkritisch sind. Die 0° -Schichten erhalten den ZFB also in einem auswertbaren Zustand. Verschiedene Kombinationen von Quer-Normalspannung σ_2 und Quer/Quer-Schubspannung τ_{23} entstehen nicht nur entlang der Balkenlängsachse, sondern können auch gezielt durch Variation der Prüfschichtposition über der Balkenhöhe eingestellt werden (*Bild 10/3*).

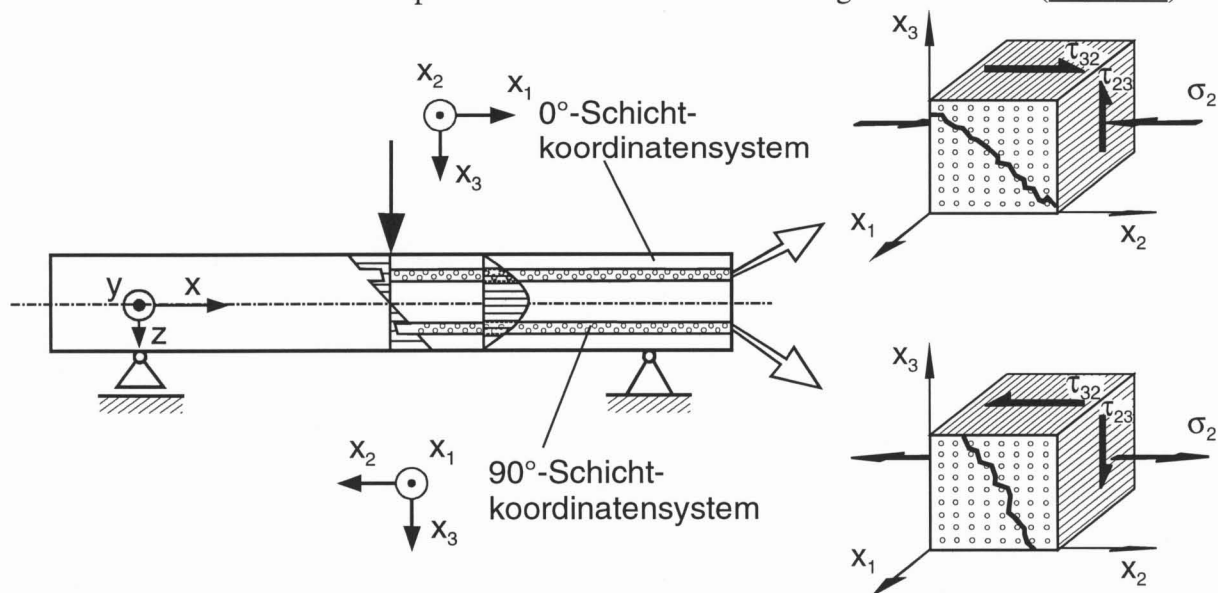


Bild 10/3: 90° -Prüfschicht in der Zug- bzw. Druckzone eines Verbundbiegebalkens

In *Bild 10/4* ist die (σ_2, τ_{23}) -Bruchkurve wiedergegeben. Diese ist identisch zur (σ_3, τ_{32}) -Bruchkurve, der Bruchwinkel ist allerdings nicht gleich. Bis zu einem Wertebereich von $\sigma_2 = 0$ bis $\sigma_2 \approx 1/4 R_{\perp}^d$ steigt der Bruchwinkel kontinuierlich von 0° auf etwa 52° an. Der Bruch wird in diesem Kurventeile stets durch die maximale Quer-Zugspannung σ_n^z erzeugt. Erreicht $|\sigma_2|$ jedoch etwa ein Viertel der Druckfestigkeit $R_{\perp}^d$, so springt der Bruchwinkel an dieser "Ecke" aufgrund des sich ändernden Bruchmechanismus in eine andere Ebene; der ZFB wird – wie schon beim Querdruckprisma beschrieben – im folgenden durch die Quer/Quer-Schubspannung τ_{nt} unter dem Einfluß bruchbehindernder σ_n^d bewirkt.

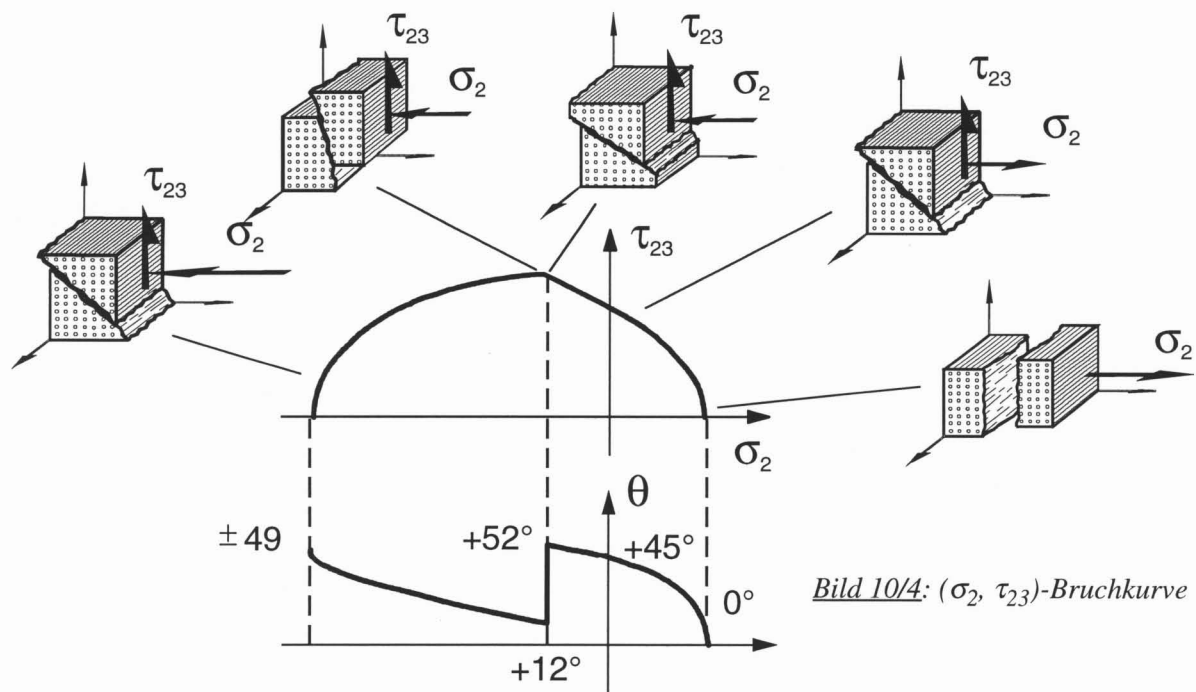


Bild 10/4: (σ_2, τ_{23}) -Bruchkurve

Eine theoretische Analyse der Möglichkeiten dieses Versuches zur Verifikation der (σ_2, τ_{23}) -Bruchkurve zeigt jedoch seine Grenzen auf.

Während der Betrag der Schubspannungsverteilung τ_{zx} beim Drei-Punkt-Biegeversuch über der gesamten Länge des Verbundbiegebalkens konstant ist, variiert die Normalspannungsverteilung für $z = \text{konst.}$ vom Maximum in den Randfasern der Mitte linear zu Null an den Auflagern (vgl. *Bild 10/1*). D.h., es herrscht an jeder Stelle x einer beliebig innerhalb der Höhenabmessung z angeordneten Prüfschicht – mit Ausnahme der mittig angeordneten – ein anderer (σ_2, τ_{23}) -Spannungszustand. Somit werden in einem Probekörper gleichzeitig verschiedene Laststrahlen "abgefahren" (*Bild 10/5*).

Für Spannungszustände mit $\sigma_2 > 0$ wird der erste Bruch immer an der Stelle der größten Normalspannung und damit in der Balkenmitte erfolgen. Aufgrund der Überhöhung der Bruchkurve im Bereich $\sigma_2 < 0$ ergeben sich hier jedoch Spannungszustände, die mit dem Biegebalkenversuch nicht erreicht werden können. Spannungszustände mit einer größeren Schubspannung τ_{23} als der bei $\sigma_2 = 0$ an den Auflagern, können erst nach Erhöhung der Biegelast über den Punkt erster ZFB hinaus auftreten. Da das Kriterium für diese ZFB an den Auflagern Bruchwinkel von etwa $\theta_B = 45^\circ$ erwarten läßt, ist mit Delaminationen und damit Zerstörung des Schichtverbunds zu rechnen, bevor – bei weiterer Lasterhöhung – auch in der Mitte des Balkens ZFB entstehen.

Neben einer Untersuchung der (σ_2, τ_{23}) -Bruchkurve ist der beschriebene Versuchsaufbau zumindest theoretisch auch zur Analyse eines großen Teils des zweiten bzw. vierten Quadranten der (σ_2, σ_3) -Bruchkurve geeignet (*Bild 6/6*), die ja im Prinzip nur einer anderen Darstellung der (σ_2, τ_{23}) -Bruchkurve ist. Dies erklärt sich aus der bekannten Transformation im Mohrschen Kreis mit den durch den Winkel Θ definierten Hauptspannungsrichtungen (*Bild 10/6*).

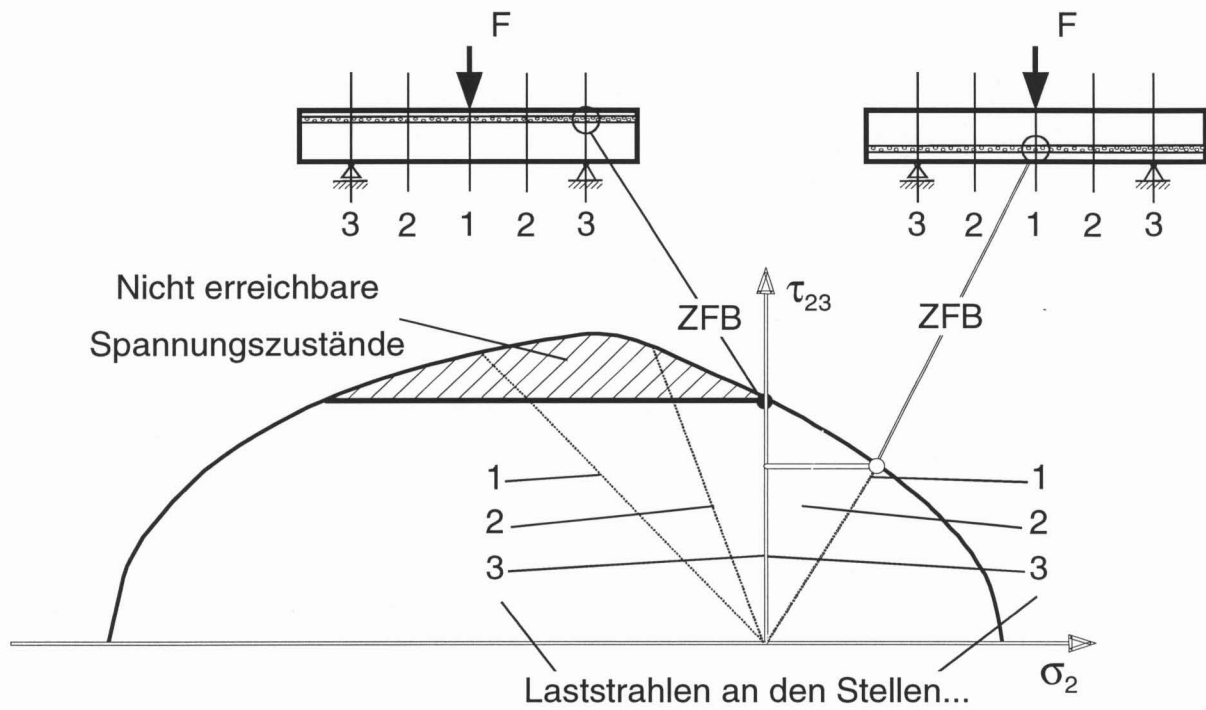


Bild 10/5: Unterschiedliche Spannungszustände in der Prüfschicht des SV-Biegebalkens

Es folgt für eine beliebig im Biegebalken angeordnete Prüfschicht (PS)

$$\sigma_{II}, \sigma_{III} = \frac{\sigma_2}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{4} + \tau_{23}^2} \quad \text{mit} \quad \tan 2\Theta = \frac{2\tau_{23}}{\sigma_2} \quad (10.1)$$

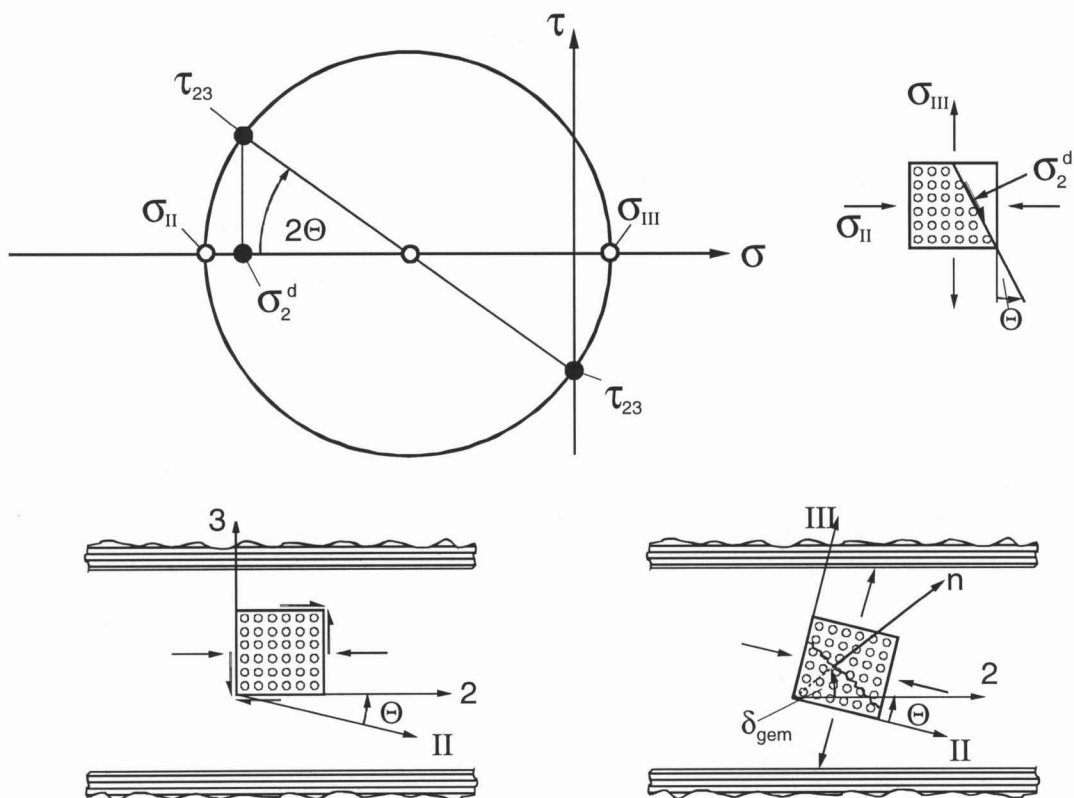


Bild 10/6: Mohrscher Kreis zur Ermittlung der Hauptnormalspannungen (PS in Druckzone)

Die Bruchwinkel müssen entsprechend auf die x_{II} -Achse bezogen werden (*Bild 10/6*). Der tatsächliche Bruchwinkel ergibt sich damit aus der Addition von gemessenem Bruchwinkel δ_{gem} (δ_{gem} entspricht θ_B für den (σ_2, τ_{23}) -Spannungsraum) gegenüber der x_2 -Achse und der "Richtung der Haupt-Normalspannungen" Θ

$$\theta_B = \delta_{\text{gem}} + \Theta \quad . \quad (10.2)$$

Die Interpretation der im folgenden zusammengefaßten Untersuchungen wird sich auf die (σ_2, τ_{23}) -Bruchkurve beschränken.

10.2 Qualitative Untersuchungen

Wie bereits in *Bild 10/5* aufgezeigt, lassen sich die Spannungszustände der (σ_2, τ_{23}) -Bruchkurve mit dem Drei-Punkt-Verbundbiegebalken theoretisch für $\sigma_2 \geq 0$ und für Teilbereiche mit $\sigma_2 < 0$ verwirklichen. Um die Bruchkurve für $\sigma_2 = 0$ zu verifizieren, muß die – als ideal dünn angesehene – 90° -Schicht in der Balkenmitte bei $z = 0$ plaziert werden. Brüche können über der gesamten Längenausbreitung des Balkens auftreten. Für alle anderen (σ_2, τ_{23}) -Spannungszustände muß die Schicht so im Balken positioniert werden, daß das erwünschte Verhältnis von $|\tau_{23}|/\sigma_2$ am Punkt der Krafteinleitung erzeugt wird.

Erste qualitative Versuche sollten Aufschluß über die Funktionsfähigkeit des beschriebenen $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ -Verbundbiegebalkens geben. Der von 0° auf 45° ansteigende Bruchwinkel im positiven Bereich der Bruchkurve (σ_2) eignete sich dazu im besonderen Maße, da die zuerst auftretenden nahezu senkrecht verlaufenden Brüche im Bereich der Krafteinleitung nicht zwangsläufig zu Delaminationen führen.

Aus *Bild 10/7* geht hervor, daß bei Anordnung der Prüfschicht in der Zugzone tatsächlich die erwartete Bruchwinkeländerung der ZFB von nahezu 0° unterhalb der Krafteinleitung bis zu einem Bruchwinkel von etwa 45° im Bereich des Auflagers eintritt.

Ein weiterer Versuch sollte Aufschluß über den Einfluß der Position der Prüfschicht innerhalb der Höhenabmessungen des Biegebalkens geben. Bedingt durch die unterschiedlichen Spannungszustände werden ZFB-Winkel in der Druckzone größer als jene in der Zugzone (*Bild 10/8*) sein.

10.3 Erste Entwicklungsstufe: In situ laminierter Balken

Die Entwicklung des Verbundbiegebalkenversuchs wurde zunächst auf den reinen τ_{23} -Spannungszustand konzentriert, d.h., die Prüfschicht wurde in der Mitte des Biegebalkens angeordnet.

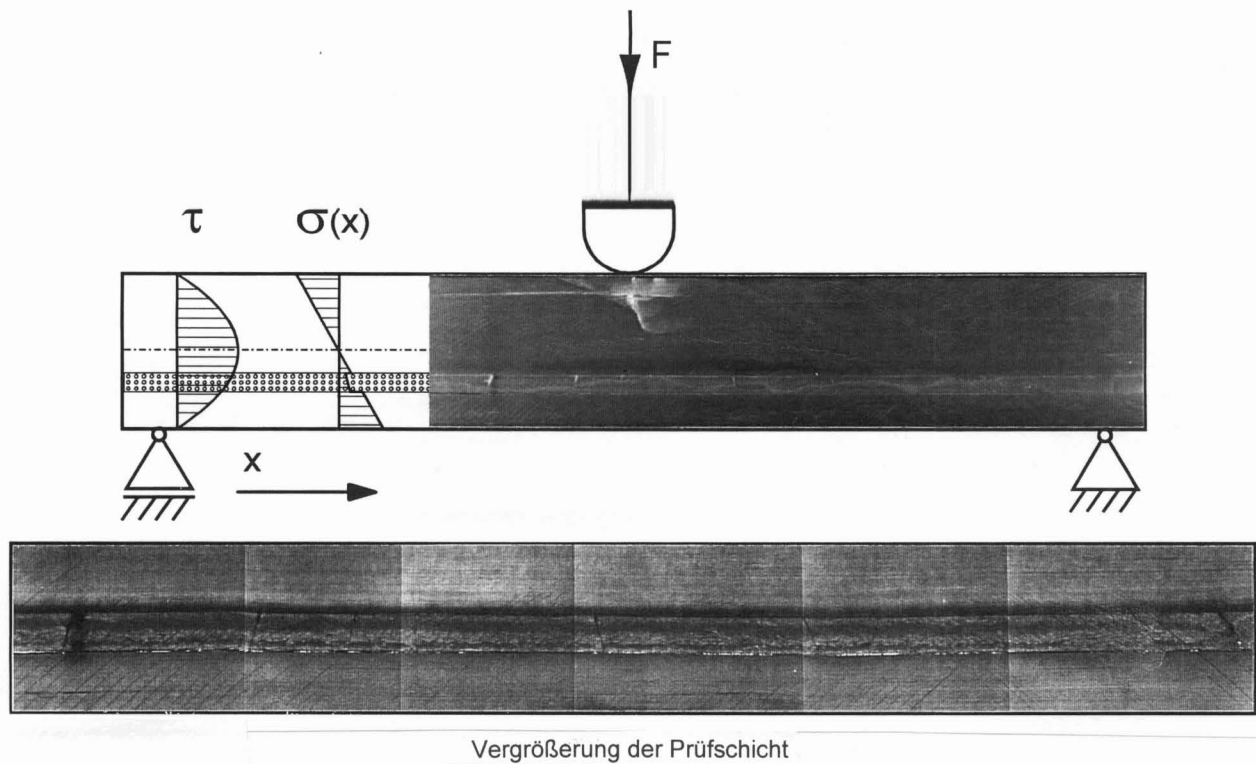


Bild 10/7: Rißbildung in der Querschicht eines Dreipunkt-Biegebalkens

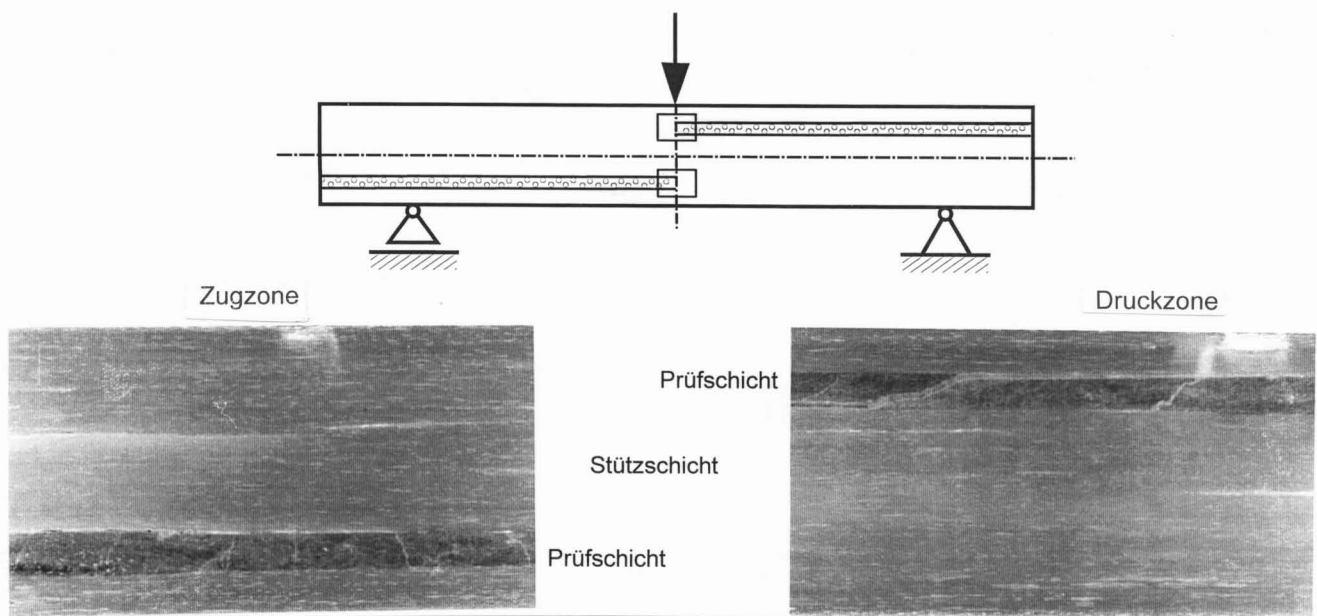


Bild 10/8: Rißbildung der Querschicht bei Positionierung in der Zug- bzw. Druckzone

Aus fertigungstechnischen Gründen wurde die Höhe des Probekörpers zunächst auf ca. 10 mm begrenzt. Um den Voraussetzungen der Technischen Biegelehre gerecht zu werden, wurde die Breite demzufolge auf 5 mm ($b/h=0,5$) und der Auflagerabstand auf 40 mm ($l/h=4$) festgelegt. Die Dicke der Prüfschicht wurde basierend auf der Vorgabe, daß die Bruchgefahr innerhalb der Prüfschichtdicke um maximal 5% abweichen darf, zu 0,375 mm ermittelt. Mit dieser Probekörpergeometrie wurden, nach einer Anzahl von Vorversuchen, erste erfolgversprechende, aber noch störspannungsbehaftete Versuche durchgeführt.

Auswertung der Bruchwinkel und Diskussion der Ergebnisse:

Es wurden 24 dieser Probekörper in situ gefertigt, d.h., der Prepregaufbau für die gesamte Dicke des Probekörpers in einem ausgehärtet. In 10 der Probekörper traten jeweils ein bzw. in wenigen Fällen zwei ZFB mit einem Bruchwinkel mit deutlicher Tendenz zum Bereich 45° - 55° auf (bei den anderen Probekörpern wurde der Versuch aufgrund des Auftretens von Delaminationen in den 0° -Schichten abgebrochen). Der Mittelwert beträgt $48,7^\circ$ und die Standardabweichung $6,3^\circ$. Die ZFB verliefen in den meisten Fällen über der gesamten Breite, wobei der Bruchwinkel an beiden Seiten leicht verschieden war (*Bild 10/9*) [Ahr 94].



Bild 10/9: Rißbildung für ($\sigma_2=0$, τ_{23}) beim in situ laminierten Verbundbiegebalken

Der experimentell bestimmte Bruchwinkel stimmt mit errechnetem und auch physikalisch zu erwartendem Bruchwinkel von 45° für reine τ_{23} -Spannungen bereits recht gut überein. Es darf allerdings nicht unberücksichtigt bleiben, daß beim Abkühlen eines in situ gefertigten ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)-Laminats Randspannungen entstehen, deren Größe und Verlauf nicht oder nur mit sehr viel Aufwand näherungsweise berechnet werden können.

10.4 Zweite Entwicklungsstufe: Kalt verklebter Balken

Um die thermisch bedingten Eigenspannungen zu vermeiden, wurden die drei Schichten bei einer Weiterentwicklung des Versuchs nicht in situ laminiert, sondern einzeln ausgehärtet und im kalten Zustand verklebt. Generell bietet sich die Verwendung von Klebefolien an, die gleichmäßige Klebschichtdicken und damit eine gute Qualität der Verklebung garantieren. Es sind jedoch nur heißaushärtende Klebfilme erhältlich, die für diese spezielle Anwendung nicht in Frage kamen; eine heißaushärtende Verklebung hätte einen ähnlichen Effekt wie die in situ Fertigung der Proben gehabt. Bei Kaltverklebungen von GFK-Epoxid-Fügeteilen erhält man die höchsten Bindefestigkeiten mit ungefüllten Epoxid-Polyaminoamid-Klebstoffen. Es wurde der Zweikomponenten-Klebstoff Araldit AY 103 mit Härter HY 991 verwendet.

Auswertung der Bruchwinkel und Diskussion der Ergebnisse:

Erstaunlicherweise sind die mit verklebten Probekörpern erzielten Ergebnisse im Vergleich zu den in situ gefertigten unbefriedigender. Es traten bei 14 der 16 geprüften Probekörper im Mittel drei ZFB gleichzeitig mit Bruchwinkeln im großen Streubereich von 0° - 45° mit einem Mittelwert

von $17,7^\circ$ und einer Standardabweichung von $13,3^\circ$ auf, die in den meisten Fällen nicht durch die gesamte Probenbreite hindurch ausgebildet waren [Ahr 94].



Bild 10/10: Rißbildung für ($\sigma_2=0$, τ_{23}) beim kalt verklebten Verbundbiegebalken

Eine Deutung des Sachverhalts fällt schwer. Als möglich Ursache für die zu geringen Bruchwinkel und den großen Streubereich wurden komplexe Randstörspannungen und ein "Hineinragen" des unteren Teils der Prüfschicht in die Zugzone ermittelt.

10.5 Dritte Entwicklungsstufe: Querkontraktionskompakt. Balken, Ergebnisdiskussion

Aufgrund einer Differenz der Querkontraktionszahlen von Prüf- und Stützschriften in Breitenrichtung kommt es bei der mechanischen Beanspruchung durch die Prüfkraft zu komplexen Randstörspannungen. Diese können vermieden werden, wenn die Querkontraktionen ϵ_{yx} und ϵ_{12} von Stützschrift und Prüfschrift einander angepaßt werden. Beim hier vorliegenden Biegebalken muß aufgrund der Parallelschaltung der einzelnen Schichten lediglich die Querkontraktionszahl ν_{yx} dem ν_{12} der Prüfschrift angepaßt werden. Einem Vorschlag von Puck folgend konnte eine solche Anpassung mit Hilfe eines (0° , 90°)-Stützlaminate aus Kohlenstoffasern (Fasertyp T300) realisiert werden, bei dem ein Schichtdickenverhältnis von 3,5:1 gewählt wurde (das entsprechende Schichtdickenverhältnis folgt aus Berechnungen nach der Klassischen Laminattheorie).

Für die praktische Fertigung der Stützschriften wurde statt UD-ES ein Atlas-Gewebe mit einem Kett-/Schußfadenverhältnis von 7:2 verwendet, was zusätzlich zu einer Homogenisierung des mittleren Verformungsbestreben führt. Zur Überprüfung der rechnerisch ermittelten Querkontraktionszahl ν_{yx} der Stützschrift, wurden Zugversuche an drei aus einem entsprechenden Gewebe laminierten Zugstäben durchgeführt. Die Querkontraktionszahl wurde zu 0,07 ermittelt [Lud96].

Zur Vermeidung jeglicher Quer-Zugspannungen wurde die jetzt 0,5 mm dicke GFK-Prüfschrift mit der Unterseite auf die neutrale Faser und somit mit ihrer gesamten Dicke in die "Druckzone" hineinverlegt. Die Stützschriften der neuen Probekörper bestehen demnach aus 4,51 mm (oben) und 4,99 mm (unten) dicken Kohlenstoffasergeweben.

Zusätzlich sollten die neuen Probekörper auch mit außermittig angeordneter Prüfschrift in der Druck- und Zugzone untersucht werden. Es sollte dabei jeweils ein Spannungszustand mit σ_2 und τ_{23} von gleicher Größe erzeugt werden. Die Dicken der Stützschriften ergaben sich hieraus zu 7,75 mm und 1,75 mm.

Auswertung der Bruchwinkel und Diskussion der Ergebnisse:

Bei allen 8 untersuchten Probekörpern waren schon vor Auftreten der ZFB leichte Delaminationen zwischen der Prüf- und den Stützsichten zu beobachten. Lediglich bei 5 Probekörpern kam es zu eindeutig in der Prüfstrecke ausgebildeten ZFB im Winkelbereich zwischen 25° und 40° . Der Mittelwert beträgt 32° bei einer Standardabweichung von $5,4^\circ$.



Bild 10/11: Bruchbilder vom Verbundbiegebalken mit CFK-Stützsichten

Die ermittelten Bruchwinkel sind deutlich kleiner als der berechnete Bruchwinkel von $\theta_B = 45^\circ$ für einen reinen τ_{23} -Spannungszustand. Eine Begründung für diese große Abweichung der experimentell ermittelten Bruchwinkel läßt sich nur schwer finden. Das Maximum im Verlauf der Bruchgefahr ist zwar nur mäßig ausgeprägt, so daß die eingezeichnete Abweichung der Bruchgefahr von 5% Bruchwinkel im Bereich von 30° - 60° möglich macht (*Bild 10/12*); dies allein ist jedoch als Begründung nicht ausreichend. Auffällig an dieser Versuchsreihe war, daß alle Brüche entweder im Bereich der Krafteinleitung oder der Auflager auftraten. Eine FEM-Untersuchung belegte die Vermutung, daß der Einfluß der "Druckzwiebeln" von nicht zu vernachlässigender Größe ist (*Farbtafel 10/1*). Setzt man die an diesen Stellen auftretenden Störspannungen σ_2 und σ_3 zusammen mit der Schubspannung τ_{23} in das ZFB-Kriterium ein, so werden hier Bruchwinkel unterhalb $\theta_B = 30^\circ$ ermittelt.

Ähnlich unbefriedigende Ergebnisse lieferten auch die Biegebalkenversuche mit außermittig angeordneter Prüfschicht. Es wurden je 4 Probekörper in der Zug- und Druckzone untersucht und in jedem dieser Probekörper ein auswertbarer ZFB erzeugt. Für eine (σ_2^z, τ_{23}) -Spannungscharakteristik in der Prüfschicht ergibt sich rechnerisch bei Verwendung von Modell #1 und Parameterfestlegung nach Tab. 6.2 ein Bruchwinkel von $\theta_B = 32^\circ$, der in der Umgebung der Krafteinleitung auftreten sollte. Tatsächlich wurden jedoch Bruchwinkel im Bereich von $16^\circ < \theta_B < 22^\circ$ ausgewertet, die sich zwischen Auflager und Krafteinleitung einstellten (*Bild 10/13*). Der Mittelwert beträgt 21° bei einer Standardabweichung von $6,5^\circ$.

Wird ein (σ_2^d, τ_{23}) -Spannungszustand in der Prüfschicht angestrebt, so ergibt sich nach Modell #1 ein Bruchwinkel $\theta_B = 19^\circ$ bzw. $\theta_B = -81^\circ$. Bevor dieser Spannungszustand erreicht wird, sollte jedoch in der Umgebung der Auflager ein Bruch unter reiner τ_{23} -Beanspruchung auftreten (vgl. *Bild 10/5*). Die Brüche traten ausnahmslos unterhalb der Krafteinleitung auf und schwankten zwi-

schen $\theta_B = 30^\circ$ und $\theta_B = 35^\circ$ (Bild 10/13). Der Mittelwert beträgt 33° bei einer Standardabweichung von $1,9^\circ$.

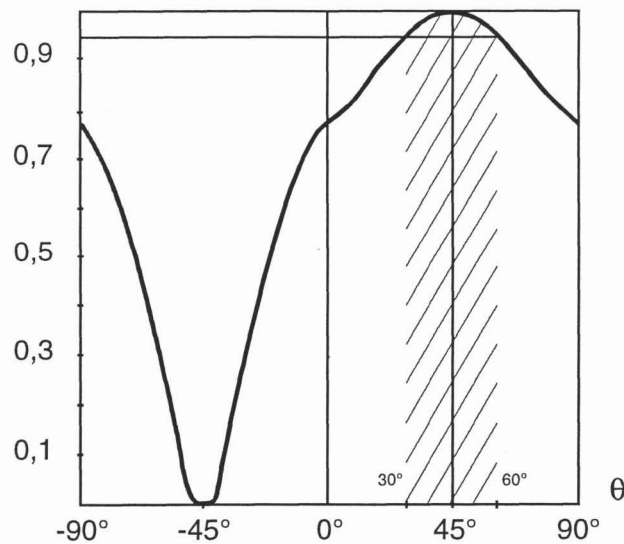


Bild 10/12: Kurve der Bruchgefahr für $\tau_{23}=60 \text{ MPa}$

Die Ergebnisse beider Versuchsreihen scheinen demnach, wie auch schon diejenigen mit mittig angeordneter Prüfschicht, verfälscht. Die Bruchstelle unterhalb der Krafteinleitung bei den Versuchen mit Prüfschicht in der Druckzone bestätigt noch einmal den enormen Einfluß der Druckzwiebel, welcher in Berechnungen nach der Klassischen Biegelehre vernachlässigt wird. Sollen die Biegebalkenversuchsreihen zu einem auch quantitativ aussagekräftigen Ergebnis gebracht werden, so muß der Einfluß von Auflagern und Krafteinleitung minimiert werden. Einen Ansatz bietet die Taillierung des Biegebalkens in y-Richtung zwischen Auflager und Krafteinleitung, die eine Verlagerung des Bereichs höchster Bruchgefahr in diese ungestörte Zone mit sich bringen würde.

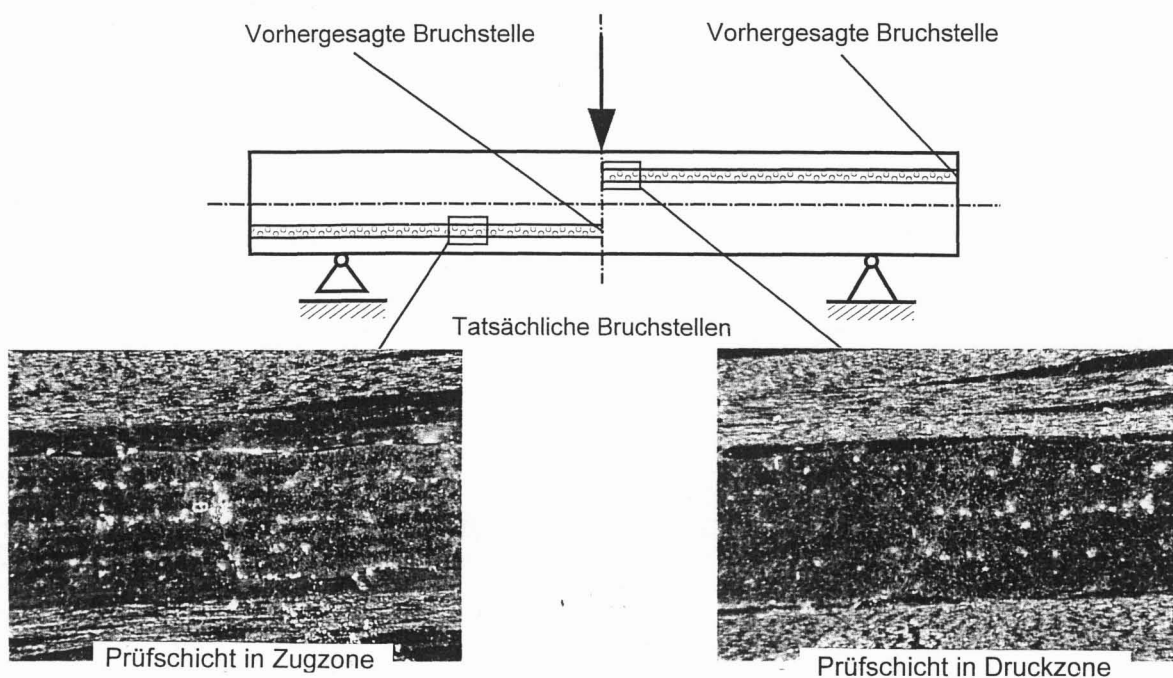


Bild 10/13: Untersuchungen am Biegebalken mit außermittig angeordneter Prüfschicht

11 Die Quetsch-Nut ($v_f \sigma_{1f}, \sigma_2^d, \sigma_3^d$) [RD, RC]

Zielsetzung:

- Untersuchung zweiachsiger Querdruckspannungen zwecks Ermittlung der FB-Grenzkurve als Begrenzung der ZFB-Grenzkurve im (σ_2^d, σ_3^d) -Gebiet

11.1 Verifizierungsweg

Bekanntlich kann ein nicht-poröser isotroper Werkstoff, dessen Gefüge nicht zerdrückt werden kann, theoretisch beliebig hohe hydrostatische Drücke (mehrmals) aufnehmen ohne zu brechen. Bei einem dichten porenarmen FKV ist dies ebenso der Fall (nicht bei einem Sandwichschaum). Geht man allerdings vom räumlichen hydrostatischen Zustand ($\sigma_I^d = \sigma_{II}^d = \sigma_{III}^d$) auf einen ebenen ($\sigma_{II}^d = \sigma_{III}^d$) Druckspannungszustand über, so versagt der isotrope Werkstoff durch Schubbruch auf dem Niveau der (einachsigen) Druckfestigkeit R^d .

Beim FKV ist dies erst bei erheblich höheren Werten als $R_{\perp}^d$ der Fall, weil die Fasern das Entstehen eines solchen Schubbruchs verhindern. Anstelle eines Schubbruchs - die Schubspannungen in der (x_2, x_3) -Ebene sind sehr klein, falls $\sigma_2^d \approx \sigma_3^d$ - wird hingegen aufgrund der in den Fasern durch Querkontraktion geweckten Faserspannungen $\sigma_{1f}^z = \varepsilon_1 \cdot E_{1f}$ Faserbruch entstehen. Dabei ist makromechanisch $\sigma_1 = 0$. Dies zeigt übrigens die Problematik an, direkt mit σ_1 -Spannungen aus der Spannungsanalyse zu arbeiten statt mit der bruchrelevanten Spannung σ_{1f} .

Die in der Literatur auffindbaren Versuche in [Col74] oder [Her82] zeigen einen Anstieg der zweiachsigen Querdruck-Bruchspannungen auf etwa $\sigma_{2B}^d = \sigma_{3B}^d \approx -10 R_{\perp}^d$. Als Probekörper wurde ein Prisma und als Prüfvorrichtung ein Druckstempel in einer Nut verwendet. Die Auswertungen der Versuchsergebnisse erlaubten jedoch keine Rückschlüsse auf den Auslösungsgrund des Bruchversagens bzw. was die primäre Bruchursache ist. Auch aus diesem Grund sollen solche Versuche in geeigneter Art und Weise nachgefahren und mit Berechnungen gekoppelt werden.

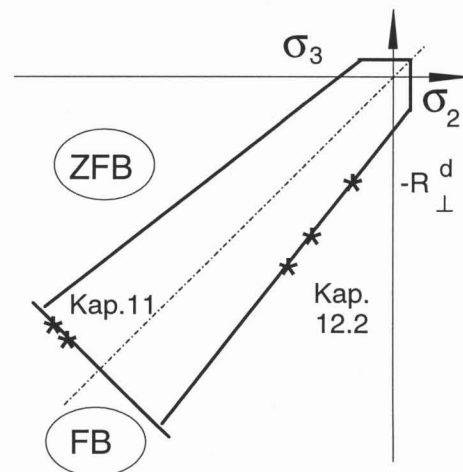


Bild 11/1: Zielfelder von Kap. 11 und 12.2

11.2 Erste Entwicklungsstufe: Probekörperfestlegung, Analysen, Tests

Die prismatischen GFK-Probekörper werden aus einer speziell gewickelten UD-Platte (s.a. Kap. 6) herausgeschnitten. Als Abmessungen des Probekörpers wurden in mm der Querschnitt zu $8,4 \times 8,4$ und die Längen zu 15,3; 10,3; 6,5 festgelegt. Dabei wurde als Vorgabe beachtet: Eine größere Länge ergibt eine homogenere Faserdehnung und damit klarere FB-Aussage, erhöht allerdings die Reibung; eine zu kurze Länge führt zu instabiler Lagerung und einem Wegkippen/Wegbrechen in

Nutlängsrichtung und mehr Spannungsinhomogenität.

Belastung und Abmessungen sind in *Bild 11/2* skizziert. Der Probekörper wird durch Shims satt in die Nut eingepaßt und durch den sehr steifen, praktisch nicht verformbaren Stempel belastet. Der Quetschweg wird als Funktion der Stempelkraft aufgezeichnet. Eine ungefähre Erfassung von Stirnflächenverformung und Längsdehnung ϵ_1 erfolgte mit Meßfühlern.

Die Modellbildung mit zugehörigen Annahmen richtet sich danach, wie sich der Probekörper in der Nut verhält. Er wird zuerst unter der "starren" Druckplatte in die Breite gequetscht und kommt dadurch an den "starren" Seitenwänden zum Anliegen. Das Breitquetschen ist allerdings wegen der Shims sehr gering und wird vernachlässigt. Nach dem Anliegen an der Seitenwand wird bei weiterer Steigerung um $\Delta\sigma_2^d$ infolge der behinderten Querkontraktion eine Seitenwandreaktion σ_3^d geweckt. Dabei reibt der Prüfling beim Ausdehnen an Druckplatte und Längsflächen, so daß der Spannungszustand im Probekörper nicht so gleichmäßig wie wünschenswert ist.

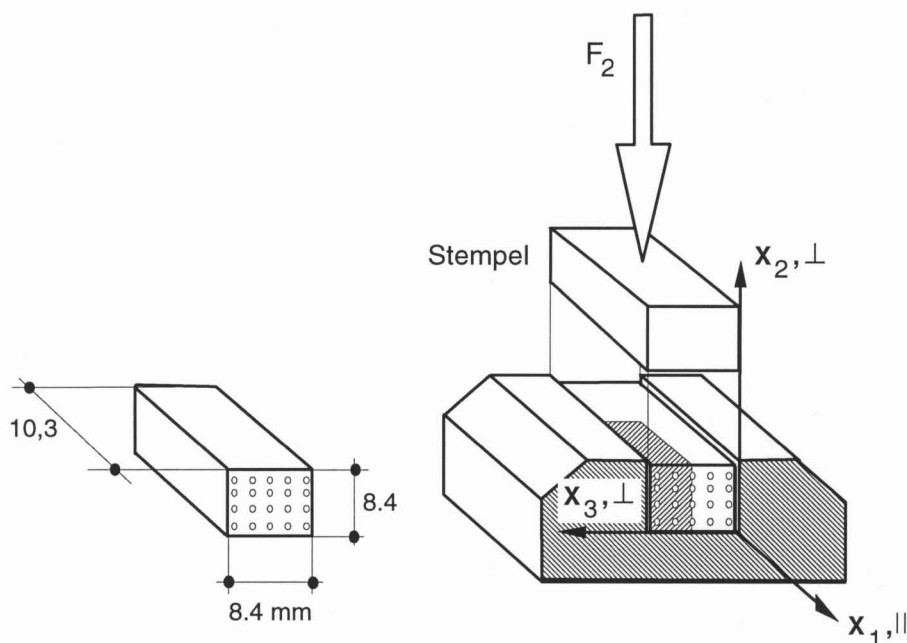


Bild 11/2: Belastungen und Abmessungen von Probekörper und Nut

Aufgrund des spröden Verhaltens von FKV kann davon ausgegangen werden, daß während des Versuchs im wesentlichen gummielastisches Werkstoffverhalten vorliegt. Diese Tatsache erlaubt eine überschlägliche Abschätzung, wann Faserbruch eintreten dürfte. Das allgemeine Hookesche Elastizitätsgesetz liefert dazu die 3 Bestimmungsgleichungen

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{\parallel} & -\nu_{\perp\parallel}/E_{\parallel} & -\nu_{\perp\parallel}/E_{\parallel} \\ & 1/E_{\perp} & -\nu_{\perp\perp}/E_{\perp} \\ \text{symm.} & & 1/E_{\perp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}. \quad (11.1)$$

Aufgrund der starren Wände gilt weiter $\epsilon_3 = 0$, so daß mit $\sigma_1 = 0$ bei gegebener Quetschspannung σ_2^d sich σ_3 und ϵ_1 aus

$$\nu_{\perp\perp}\sigma_2^d/E_{\perp} = \sigma_3/E_{\perp} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_3 = \nu_{\perp\perp}\sigma_2^d \quad (11.2)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-v_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}}(\sigma_2^d + \sigma_3) = \frac{-v_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}^z}(v_{\perp\perp} + 1)\sigma_2^d \quad (11.3)$$

abschätzen lassen.

Bei GFK werden Bruchdehnungen von etwa $e_{1f} = 2\%$ erreicht. Damit kann wiederum auf eine zugehörige Druckspannung unter dem Stempel, für $v_{\perp\parallel} = 0,3$ und $v_{\perp\perp} = 0,4$, von etwa

$$\sigma_2^d \approx -\varepsilon_1 E_{\parallel}^z / (v_{\perp\parallel} (1 + v_{\perp\perp})) = -0,02 \cdot 44500 / (0,3(1 + 0,4)) \approx -2000 \text{ MPa} \quad (11.4)$$

geschlossen werden, womit als maximal erforderliche Prüfkraft 200 kN errechnet wird.

Für den Vergleich mit den Meßergebnissen wesentlich ist die Stauchung

$$\varepsilon_2^d \cdot E_{\perp} = \sigma_2^d - v_{\perp\perp}\sigma_3 = \sigma_2^d (1 - v_{\perp\perp}^2). \quad (11.5)$$

Damit führt eine Zahlenabschätzung unter den angenommenen Werten

$$\varepsilon_1 = 1,9 \%; \quad v_{\perp\parallel} = 0,35; \quad v_{\perp\perp} = 0,45 \text{ (Verhalten nähert sich Volumenkonstanz, } v = 0,5),$$

$$E_{\perp}^d \approx 10000 \text{ MPa (wegen der nicht so hohen Qualität dieses Probekörpers und aus Linearisierungsgründen nicht 12500 MPa genommen)}$$

zu folgender Quetschspannung und Dehnung

$$\sigma_2^d \approx -1665 \text{ MPa} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2^d \approx \sigma_2^d / (E_{\perp}(1 - v_{\perp\perp}^2)) = -21 \%.$$

Die Versuche lieferten die in Bild 11/3 eingetragenen Meßergebnisse für die 3 Probekörpertypen.

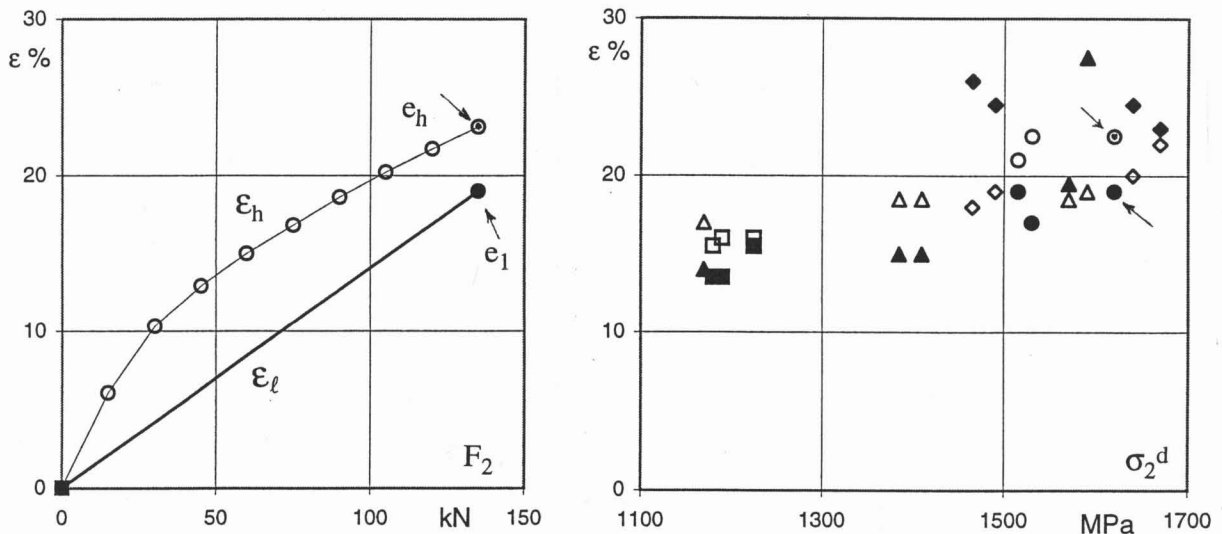


Bild 11/3: Meßergebnisdarstellung. ($\square$ ($\ell = 15,3$); $\circ$ ($\ell = 10,3$); $\diamond$ ($\ell = 6,5$).

(Die zugehörigen fetten Zeichen gehören zu ε_ℓ , das 10fach überhöht aufgetragen ist).

Der Verlauf der Verformungsmessung führt bei der Kurve ε_h (F_2) nach anfänglichem kleinen Setzvorgang zu einer mehr und mehr bzgl. der Last F_2 ansteilenden Kurve. Dieses resultiert aus dem Versteifungseffekt, den ein Werkstoffprisma erfährt, wenn es in 1-Richtung sehr behindert, in 3-Richtung starr behindert und in 2-Richtung belastet ist und für das mit zunehmender Belastung $v_{\perp\parallel}$ und $v_{\perp\perp}$ gegen 0,5 gehen, also Volumenkonstanz ($v = 0,5$) im Extremfall herrscht und der sog. Kompressionsmodul der Matrix (Faser hier nicht betrachtet) $K = E/(3 - 6v)$ gegen ∞ geht.

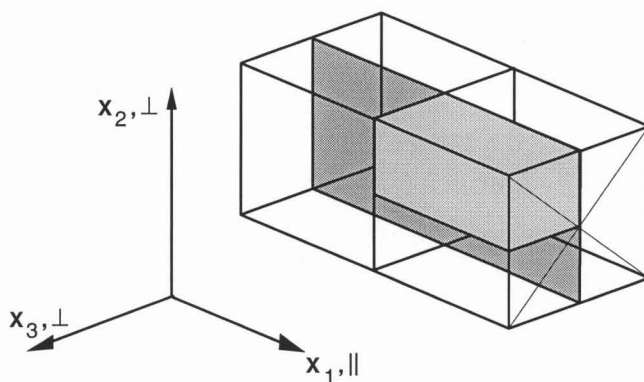
Aus der punktuell in Stirnflächenmitte erfolgten, aber nicht sehr genauen $\Delta\ell$ -Messung ist praktisch eine lineare Kraft-Verlängerung ableitbar.

Als Bruch-Stauchungen $e_h = \Delta h / h$ wurden Werte von 17 % bis 26 % gemessen, als axiale (Faser-) Bruch-Dehnungen $e_1 = e_\ell = \Delta \ell / \ell$ Werte zwischen 1,3 % und 2,6 %. Die Längsdehnungen lassen aber wegen des einfachen Meßaufbaus noch keinen eindeutigen Schluß auf FB zu.

Die Bewertung dieser ersten Versuchsergebnisse unter Betrachtung der Bruchstücke zeigte, daß die mittlere Probekörperlänge den besten Kompromiß darstellen dürfte.

11.3 Zweite Entwicklungsstufe: FEM-Berechnung und Ergebnisse

Nach Festlegung auf eine Probekörpergröße von 10,3 x 8,4 x 8,4 wurden FEM-Berechnungen durchgeführt, um unter Berücksichtigung von Haft- und Gleitreibung das Verhalten im Test möglichst realistisch nachzurechnen. Dazu diente das Modell in *Bild 11/4* nebst den dort ebenfalls aufgeführten Rechenwerten für den nicht ideal fertigten Probekörper. Die Angabe der Steigungsparameter erfolgt, weil die ZFB-Anstrengung aus Vergleichsgründen mit ermittelt werden soll.



$$\begin{aligned} \bar{R}_\perp^d &\approx 180 \text{ MPa}; \bar{R}_{\perp\parallel} \approx 80 \text{ MPa}; \bar{R}_\perp^z \approx 60 \text{ MPa} \\ p_{\perp\parallel}^z &= 0,15; p_{\perp\perp}^d = 0,10 = p_{\perp\perp}^z = p_{\perp\parallel}^d \\ \mu_{\text{Haft}} &= 0,05; \mu_{\text{Gleit}} = 0,03 \\ \sigma_2^d &= -120 \text{ MPa (Bezugsbeanspruchung)} \\ \text{Parabolischer Ansatz Puck} \\ E_\perp^d &= 12500 \text{ MPa (Tabelle 6/2)} \end{aligned}$$

Bild 11/4: FE-Modell und Rechenwerte des Probekörpers

Für die Berechnung werden zwei Symmetrieebenen genutzt, so daß nur ein Viertel des Probekörpervolumens vernetzt werden mußte. Das Beispiel wurde sowohl mit den Reibungswerten ($\mu_{\text{Haft}} = 0,1; \mu_{\text{Gleit}} = 0,05$) als auch (0,05/0,03) durchgerechnet, wobei keine wesentlich unterschiedlichen Ergebnisse festgestellt wurden, sondern nur ein geringer Einfluß auf den Spannungszustand.

Als wesentliche Rechenergebnisse werden die Längsdehnung und die ZFB-Anstrengung angegeben, (*Farbtafel 11/1*). Als Bezugs-Druckbelastung wurde $\sigma_2^d = -120 \text{ MPa}$ konstant über der Druckfläche angesetzt. Alle im folgenden angegebenen Spannungen sind Mittelpunktspannungen des entsprechenden finiten Elements.

Wie Farbbild 11/1 entnommen werden kann, sind sowohl Längsdehnung ε_1 als auch ZFB-Anstrengung in den Stirnflächenecken unter der Stempelplatte am größten. Für die Dehnung unter der zugehörigen, lokal am Rand höheren Stempeldruckspannung σ_2^d von etwa -125 MPa ergibt sich der Wert $\varepsilon_1 = 0,105 \text{ %}$. Die ZFB-Anstrengung ist ziemlich gleichmäßig im Probekörper. Ihr Wert wird zu $A = 0,64 = 0,378 \cdot 105/180$, wenn die später gemessene geringere Querdruckfestigkeit von 105 MPa des Querdruck-Probekörpers (s. Kap. 10) in dieser Versuchsnachrechnung berücksichtigt

wird. Als Wandreaktion wird $\sigma_3^d = -47 \text{ MPa}$ geweckt, ein Wert, welcher der Abschätzung $v_{\perp\perp} \sigma_2^d = 0,45 \cdot (-120) = -54 \text{ MPa}$ in etwa entspricht.

Die Versuchsauswertung hat ergeben, daß der Bruch zwar in der rechnerisch angezeigten Ecke erfolgt, aber bei sehr viel höherer Last ($A \approx 7$) als der, bei der $A \text{ (ZFB)} = 1$ erreicht wird! Daraus resultiert eine wertvolle Erkenntnis: "Die Erfüllung einer Bruchbedingung ist eine notwendige aber noch nicht hinreichende Bedingung für das wirkliche Auftreten eines Bruchs. Der Bruch muß sich auch ausbilden können!" Das war aber für den ZFB nicht möglich.

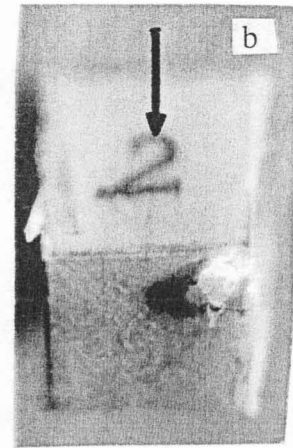
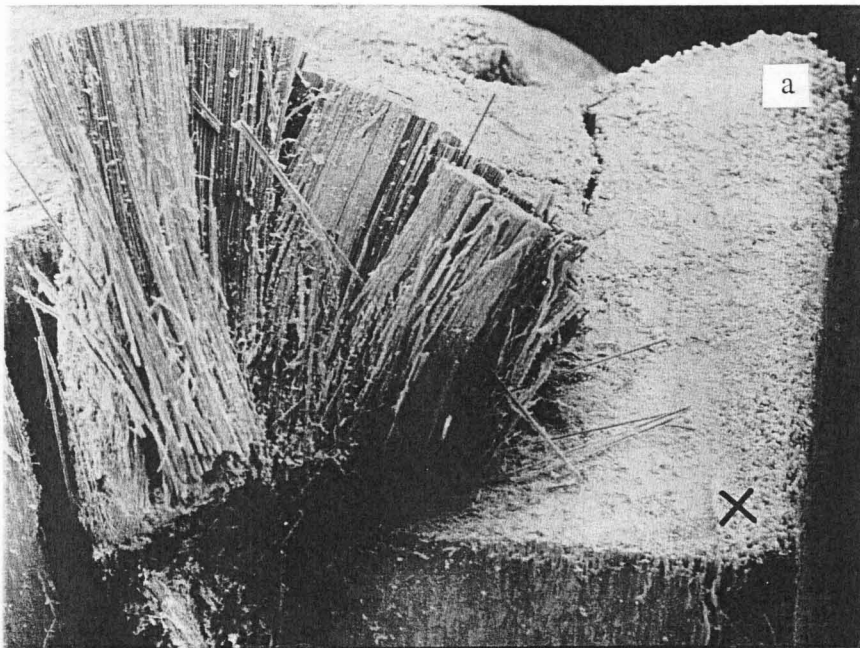
Eine genauere Betrachtung der Bruchstelle vermittelt den Eindruck, daß von einer der beiden Ecken der Stirnfläche, unter dem Druckstempel in diagonaler Richtung (*Bild 11/5*), Schalenstücke wie "Butterflocken" hintereinanderliegend herausgekeilt werden. Initiierung für dieses Auskeilen könnte neben FB, der laut *Bild 11/5c* wohl auftritt, auch ein SB der Matrix aus der Stirnflächenebene heraus sein.

Der Probekörper in *Bild 11/5a* wurde unter der Bruchlast 135 kN in der Mitte bis $e_\ell = 1,85 \%$ gedehnt und von 8,4 mm auf 6,55 mm zusammengedrückt. Das führt zu den Meßwerten $e_1 = 1,85 \%$, $e_2 \approx -22 \%$ bei $\sigma_2^d \approx -1600 \text{ MPa}$ und deckt sich in der Größe mit den Werten aus analytischer Berechnung $e_1 = 1,9 \%$: $e_2 \approx -21 \%$, $\sigma_2^d \approx -1665 \text{ MPa}$.

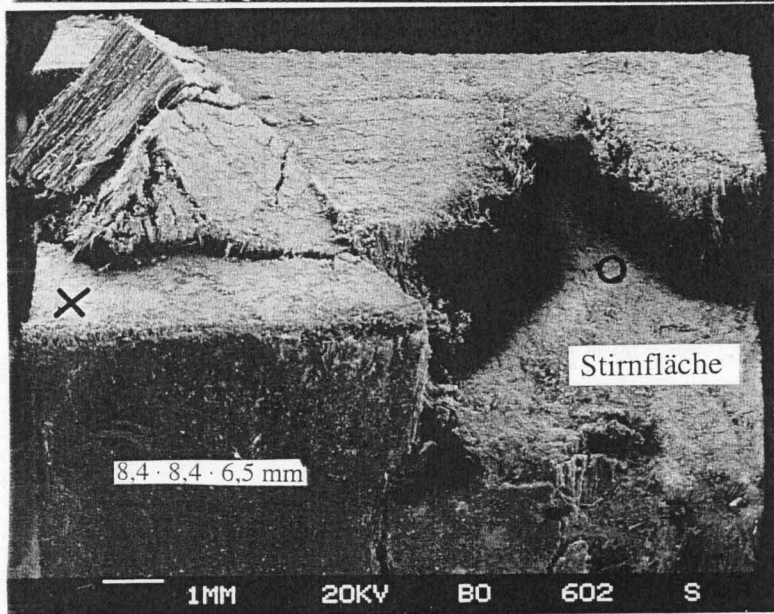
Als FEM-Ergebnisse ergaben sich für die Eingabedaten $E_\perp^d = 14500 \text{ MPa}$, $v_{\perp\parallel} = 0,28$ und $v_{\perp\perp} = 0,40$ die Werte $\Delta\ell = 0,00517 \text{ mm}$ (Farbbilder 11/1) für die halbe Probekörperlänge und $\Delta h = -0,0668$. Nach Umrechnung auf die in der analytischen Berechnung angesetzten Werte $E_\perp^d = 10000 \text{ MPa}$, $v_{\perp\parallel} = 0,35$ und $v_{\perp\perp} = 0,35$ ergeben sich für $\sigma_2^d = -1600 \text{ MPa}$ die Werte $e_1 = 1,73 \%$, $e_2 = -20 \%$, was ebenfalls gut paßt.

Für den Konstrukteur verbleiben somit folgende wesentliche Ergebnisse:

- Zweiachsige Querdruck-Bruchspannungen zeigen tatsächlich Werte im zehnfachen Bereich der Querdruck-Festigkeit $R_\perp^d$.
- Der (σ_2^d, σ_3^d) -Spannungszustand nahe der Stirnfläche und speziell in den Ecken ist nicht homogen, so daß FB als primäre Bruchursache nicht klar genug belegt werden kann.
- Bruch tritt bei Erfüllung einer Bruchbedingung dann nicht auf, wenn er sich nicht über Werkstoffverschiebungen auch ausbilden kann.

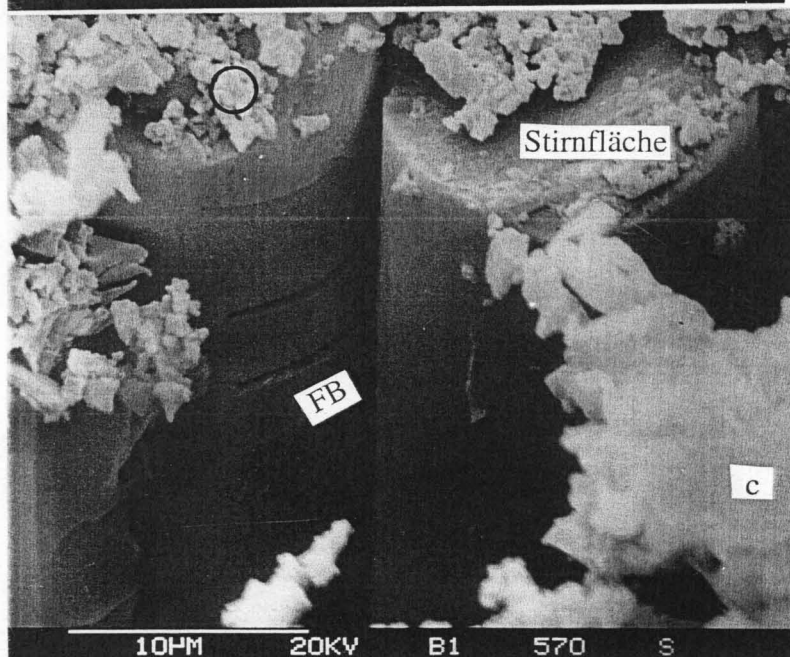
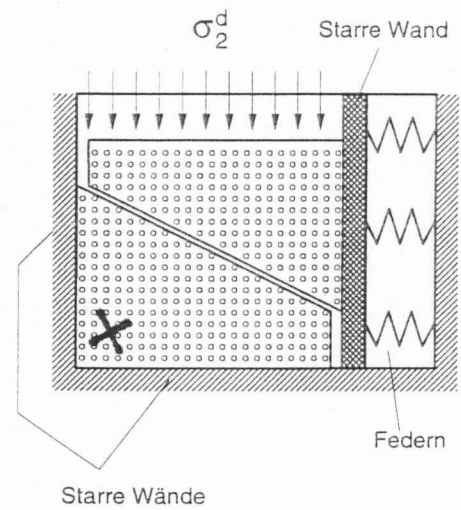


8,4 · 8,4 · 10,3 mm

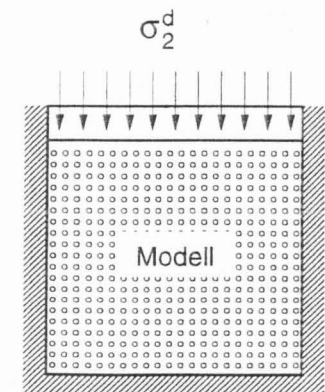


8,4 · 8,4 · 6,5 mm

1MM 20KV B0 602 S



10MM 20KV B1 570 S



*Bilder 11/5: Bruchbilder a, b, c und
Ausbildbarkeit von Bruchebenen*

12 MEHRAXIALE DRUCKVERSUCHE

Zielsetzung:

- Untersuchung der Spannungscombination (σ_2^d, σ_3^d) zwecks Verifikation der Hypothese
- Ermittlung des Bruchwinkels θ_B für unterschiedliche Spannungsverhältnisse.

In Kap. 6 wurde bereits auf die Bedeutung des (σ_2, σ_3)-Spannungsraums im Hinblick auf eine Verifikation der den Modellvorstellungen zugrundeliegenden Hypothesen verwiesen. Um eine erste Aussage über die gegenüber anderen Bruchkriterien deutlich höheren Festigkeiten für ($\sigma_2^d = \sigma_3^d$)-Spannungszustände machen zu können, wurden qualitative Untersuchungen unter hydrostatischem Druck ($\sigma_1^d = \sigma_2^d = \sigma_3^d = -p_{hyd}$) an einem ringförmigen Probekörper durchgeführt [Kro93].

Der umfangsgewickelte Probekörper wurde entsprechend dem Standardrohrprobekörper als kreuzungsfreier Wickelverbund realisiert, so daß mit der Einschränkung des Radienverhältnisses $r_a/r_i \leq 1,1$ das Rohr als ebener UD-SV betrachtet werden kann. Der oberflächendichte Probekörper wurde in der Druckkammer einer kaltisostatischen Presse dem Maximaldruck von 4000 bar (400 MPa) ausgesetzt und anschließend unter einem Durchlichtmikroskop untersucht. Der Druckaufbau erfolgte innerhalb einiger Minuten durch Einwirkung eines Druckkolbens auf eine Öl/Wasser-Emulsion. Lediglich in tieferen Schichten zeigten sich einzelne winzige Risse zwischen den Glasfasern; diese Mikrorisse führen allerdings nicht zu einem ZFB. Der Versuch deutet trotz des Nichtverschwindens der Verbundspannung σ_1^d bereits auf die sehr hohe Festigkeit gegenüber biaxialer Querdruckbelastung hin.

12.1 Hydrostatischer Versuch ($\sigma_1^d, \sigma_2^d, \sigma_3^d$) [LK]

In weiteren Versuchen bei hydrostatischem Spannungszustand sind oberflächenversiegelte Ringe allseitig gleichem Überdruck $p_{hyd} = 6000$ bar ausgesetzt worden, wobei die GFK-Ringe aus umfangsgewickelten Rohrprobekörpern (Innendurchmesser: 40 mm, Dicke: 2 mm, Wickelwinkel: 2°) herausgeschnitten wurden. Nach dem Druckversuch ist dabei kein Versagen der Probekörper festgestellt worden!

Die Berechnung der im Versuch aufgetretenen Spannungen erfolgte in diesem Fall mit Hilfe der Lösungsansätze für dickwandige Zylinderschalen [Kro92]. Der von der Längs- und Umfangskoordinate unabhängige Spannungsverlauf ist im *Bild 12/1* über dem Radius dargestellt, wobei die Extremwerte am Innenradius auftreten. Aufgrund der technisch bedingten Winkelabweichung von 2° bei der Fadenablage kommen zusätzlich noch sehr geringe Schubspannungen $\tau_{z\varphi} = 0,6$ MPa zur Wirkung, die im weiteren zwar berücksichtigt werden, jedoch das Ergebnis der Überprüfung nur unwesentlich beeinflussen.

Zur Anwendung der Bruchbedingung (2.37) werden die Werkstoffkennwerte gemäß *Tab. 6/2* vorausgesetzt und weiter angenommen $\mu_{\perp\perp} = 0,1 = -m_{\perp\perp}$ und $\mu_{\perp\parallel} = 0,2 = -m_{\perp\parallel}$. Gleichung (1.31) liefert für den am stärksten beanspruchten Innenmantelbereich $f_{Res} \approx 1000$ (bei einem Bruchwinkel $\theta_B = 0^\circ$, im wesentlichen infolge von $\tau_{n1} = \tau_{z\varphi}$), wodurch in Einklang mit dem experimentellen Be-

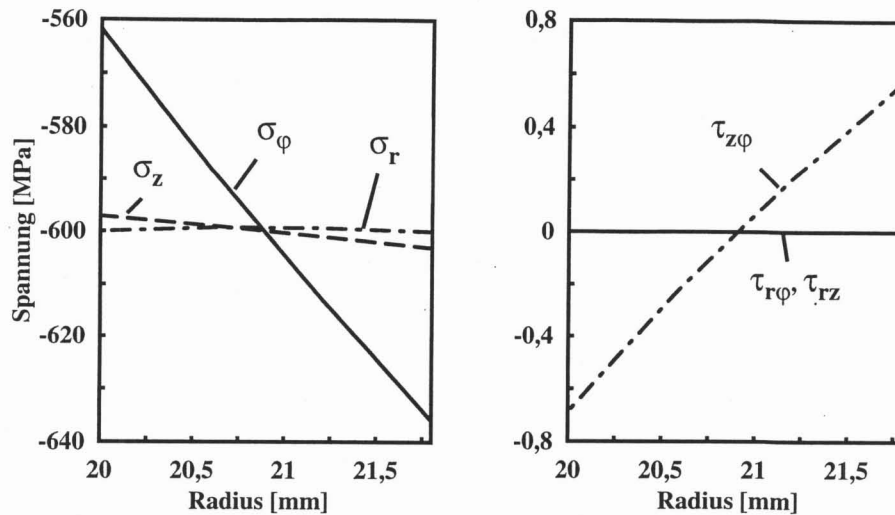


Bild 12/1: Verlauf der räumlichen Spannungen bei $p_{hyd} = 6000$ bar

keinen Fall Versagen des Verbundes eintreten kann. Dagegen folgt aus dem Versagenskriterium nach TSAI/WU für dieselbe Bewertungsstelle $f_{Res} \approx 0,21$, was eine mehr als vierfache Ausschöpfung der Materialreserven darstellen würde (s.a. 13.6).

12.2 Biaxialer Querdruckversuch mit "G-Elementen" ($\sigma_1^d, \sigma_3^d, \theta_B$) [DH, JK]

Für sehr hohe ($\sigma_1^d, \sigma_2^d = \sigma_3^d$)-Spannungszustände ist der Einfluß von σ_1^d nicht mehr zu vernachlässigen. Aufgrund der Querexpansion entsteht eine Dehnung in Faserrichtung, die – legt man das Hookesche Gesetz zugrunde – bei einem Spannungszustand von $\sigma_2^d = \sigma_3^d \approx -3500$ MPa die Bruchdehnung der Glasfasern erreicht. Bei Vermeidung der hydrostatisch bedingten Spannung σ_1^d könnte demnach Faserbruch entstehen (s. Kap. 11).

Diesen Überlegungen folgend wurden Versuche angedacht, die einen biaxialen Druckspannungszustand ohne faserparallele Spannung σ_1^d ermöglichen.

12.2.1 Verifizierungsweg

Stand der Technik auf dem Gebiet der zweiachsigen Normalspannungsversuche sind recht aufwendige Versuche mit senkrecht zueinander stehenden Hydraulikzylindern in den beiden Belastungsrichtungen. Eine solche Prüfmaschine stand während des Untersuchungszeitraums jedoch nicht zur Verfügung. Aus diesem Grund wurde ein Konzept erarbeitet, mit dem die einachsige Druckbelastung einer konventionellen Zug/Druck-Prüfmaschine in eine biaxiale Drucklast auf einen Probekörper umgesetzt werden kann [Wel96].

12.2.2 Erste Entwicklungsschleife: Prüfvorrichtungskonzept und Analyse

In Bild 12/2 ist das verfolgte Konzept dargestellt. Über zwei rechtwinklige Flächen, wird die Kraft der Prüfmaschine in Richtung der beiden Flächennormalen aufgeteilt. Die Beträge der beiden Teilkräfte folgen aus dem Betrag der Hauptkraft und dem Winkel δ , zwischen Prüfachse und Flä-

chennormalen. Es ist hierbei zu beachten, daß die eingeleiteten Druckbeanspruchungen in großen Maß von der Eigensteifigkeit der Prüfvorrichtung abhängig sind.

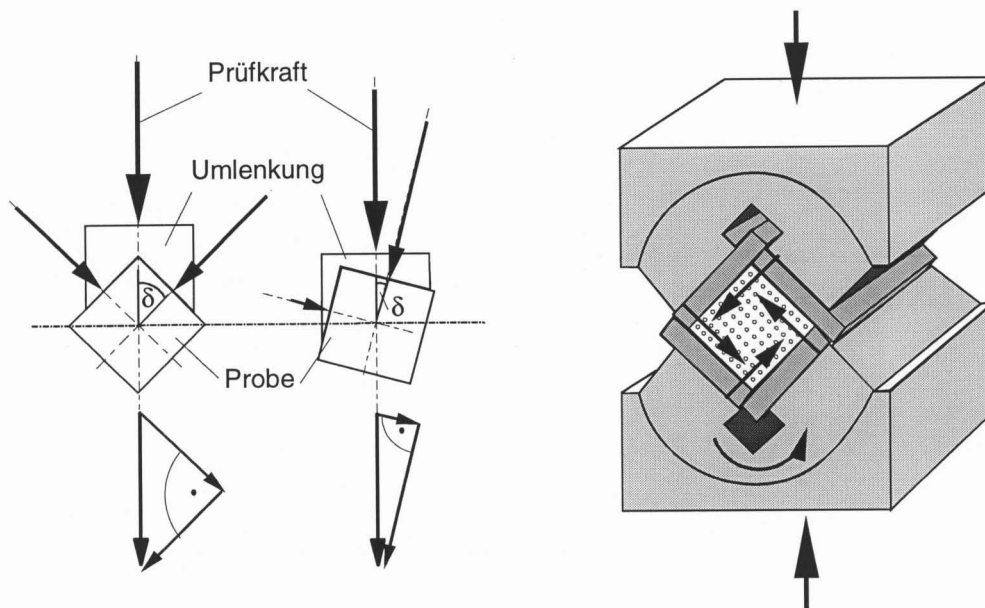


Bild 12/2: Konzept einer zweiachsigen Druckvorrichtung

Bei einer biaxialen Druckprüfung verringert sich die Dicke des Probekörpers senkrecht zu Faserrichtung in beiden Lastrichtungen, während es in Faserrichtung zu einer Querexpansion kommt. Gänzlich anders verhält es sich bei den Druckflächen der beiden V-förmigen Kraftumlenkungen. Diese unterliegen einer vorwiegend einachsigen Druckbeanspruchung und werden eine Querexpansion in Faserrichtung und auch quer dazu erfahren. Die resultierende Relativbewegung muß durch vier möglichst reibungsfrei auf dem Probekörper gleitende Platten kompensiert werden, die nach dem Schema "Kante auf Fläche" aneinanderstoßen. In *Bild 12/2* ist die bewegliche Plattenkombination bereits in den Kreiszyylinder integriert worden.

Im Hinblick auf eine präzise orthogonale Verformung des Probekörpers läßt sich eine weitere Verbesserung des Plattenkonzepts finden [Ash86, Sen93]. Es werden in Anlehnung an eine biaxiale Preßvorrichtung vier "G"-förmige Elemente so zusammengefügt, daß ihnen eine rein orthogonale Bewegungsrichtung vorgegeben ist (*Bild 12/3*).

Als Werkstoff für die "G"-Elemente und die V-Bauteile wurde der Vergütungsstahl 40 Cr Mn Mo S 8 6 als ausreichend druckfest abgeschätzt. Zur Verringerung des Reibungskoeffizienten wurden Oberflächen der "G"-förmigen Krafteinleitungen auf einem Schleifteller (Körnung P4000) bearbeitet.

Einfluß der Eigenelastizität der Prüfvorrichtung:

Die Prüfvorrichtung hat durch ihre Eigenelastizität einen deutlichen Einfluß auf das Größenverhältnis σ_2^d/σ_3^d . Mit ansteigender Steifigkeit wird der vorgegebene Weg der Maschine direkter in Form einer Dehnung an den Probekörper weitergeleitet. Die realen Belastungsverhältnisse des Probekörpers müssen daher zwischen einem "ideal-steifen" und einem "ideal-elastischen" Fall der Prüfvorrichtung abgeschätzt werden:

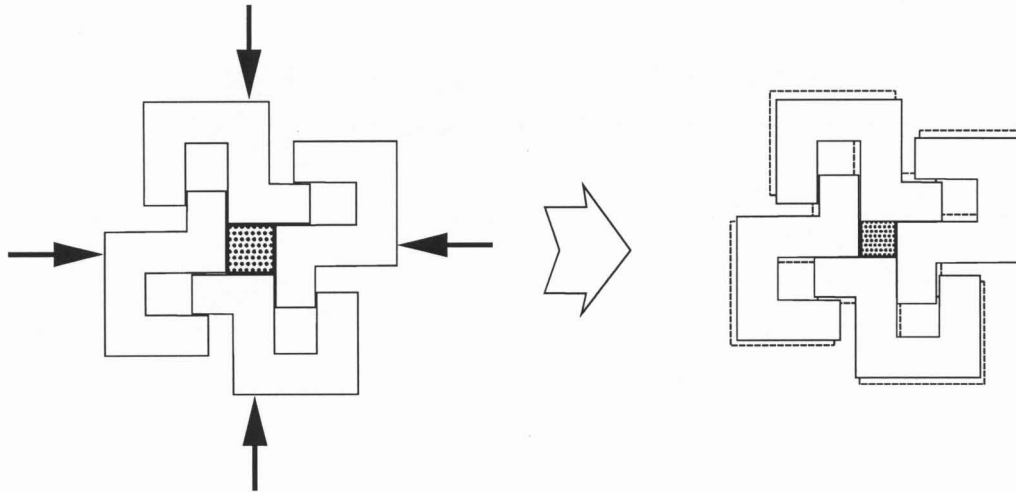


Bild 12/3: "G"-förmige Elemente bei zweidimensionaler negativer Dehnung

"Ideal-elastischer" Fall:

Geht man davon aus, daß die Vorrichtung gegenüber dem Probekörper sehr nachgiebig ist, so wird der Probekörper seine Form relativ ungehindert den Belastungen anpassen können, die Querkontraktion wird demnach keine nennenswerte Erhöhung der Spannung verursachen. Die gemessene axiale Prüfkraft F wird damit gemäß dem Kräfteparallelogramm in *Bild 12/2* aufgeteilt, so daß für einen würfelförmigen Probekörper gilt

$$\sigma_2 = \frac{F}{A} \cdot \cos \delta \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \frac{F}{A} \cdot \sin \delta. \quad (12.1)$$

"Ideal-steifer" Fall:

Wird die Prüfvorrichtung gegenüber dem Probekörper als "unendlich steif" angesehen, so wird dem quadratischen Probekörper genau der Prüfweg in einer Aufteilung gemäß *Bild 12/4* aufgezwungen, d.h., es wird keinerlei Ausdehnung durch Querkontraktion zugelassen.

Für eine Abschätzung des Bruchzustandes wird das erweiterte Hookesche Gesetz für transversal-isotrope Werkstoffe unter zweiachsiger Beanspruchung herangezogen

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_{\perp}} (\sigma_2 - \nu_{\perp\perp} \sigma_3) \quad ; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E_{\perp}} (\sigma_3 - \nu_{\perp\perp} \sigma_2). \quad (12.2)$$

Mit der Voraussetzung, daß eine genau definierte Verformung entsprechend

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \tan \delta \quad (12.3)$$

erzwungen wird, ergibt sich als Verhältnis der Spannungen

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\tan \delta + \nu_{\perp\perp}}{1 + \nu_{\perp\perp} \tan \delta}. \quad (12.4)$$

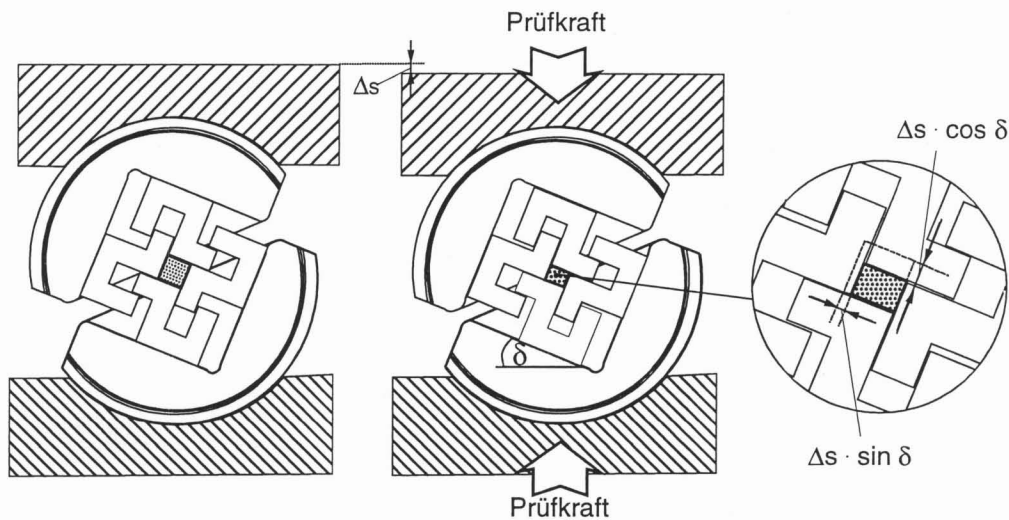


Bild 12/4: Verformung bei "ideal-steifer" Prüfvorrichtung

In *Bild 12/5, links* sind beide Grenzfälle in einem Diagramm aufgetragen ($\nu_{\perp}=0,4$). Der tatsächlich im Probekörper vorhandene Spannungszustand liegt im Bereich zwischen den beiden extremen Betrachtungsweisen. Überträgt man die mögliche Abweichung $\Delta\sigma$ in die (σ_2, σ_3) -Bruchkurve, wie im rechten Teil von *Bild 12/4* geschehen, so zeigt sich, daß je nach Betrachtungsweise ein anderer Drehwinkel δ eingestellt werden muß, um das gewünschte Belastungsverhältnis zu realisieren.

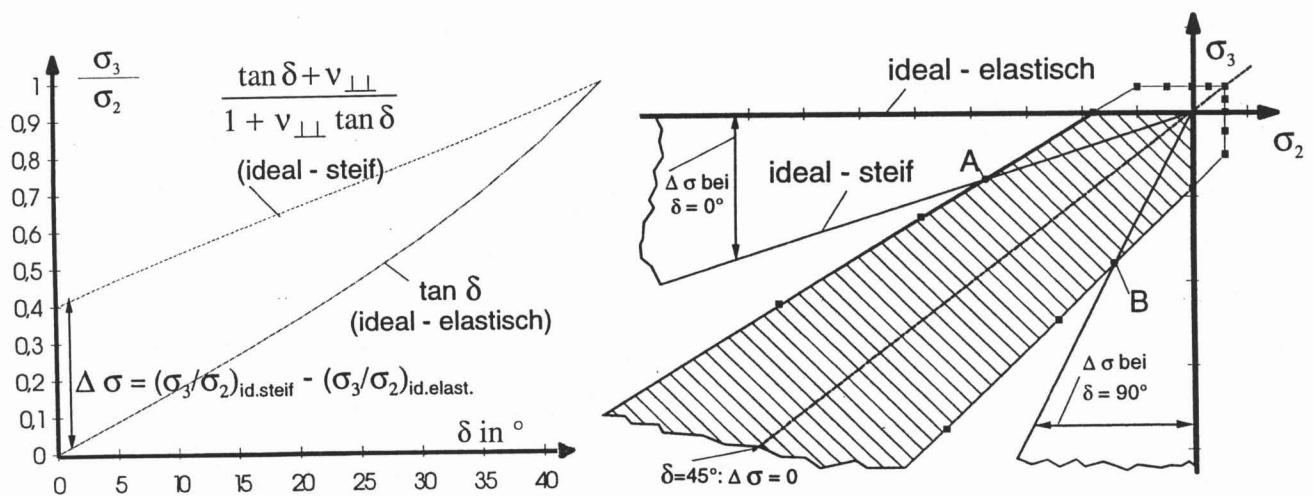


Bild 12/5: Auswirkungen unterschiedlicher Steifigkeitsbetrachtungen

Als Beispiel sei auf die Punkte A bzw. B verwiesen, die aufgrund der transversal isotropen Werkstoffeigenschaften des UD-GFK äquivalent sind.

Bei einer "ideal-elastischen" Vorrichtung müßte ein $\delta = 21,8^\circ$ eingestellt werden, um das gleiche Belastungsverhältnis von $\sigma_3/\sigma_2=0,4$ zu erzielen, das bei Annahme einer "ideal-steifen" Prüfvorrichtung schon bei $\delta = 0^\circ$ vorliegt; in der Realität wird sich wohl ein Punkt zwischen 0° und $21,8^\circ$ ergeben.

12.2.3 Zweite Entwicklungsschleife: Versuche an Probekörpern mit Mulde [DH, JK, LK]

Nach einer Anzahl von Vorversuchen, erwies sich die in *Bild 12/6* dargestellte Probekörpergeometrie mit in Faserrichtung eingebrachten Vertiefungen als am geeignetsten. Ihre ebene Mulden-

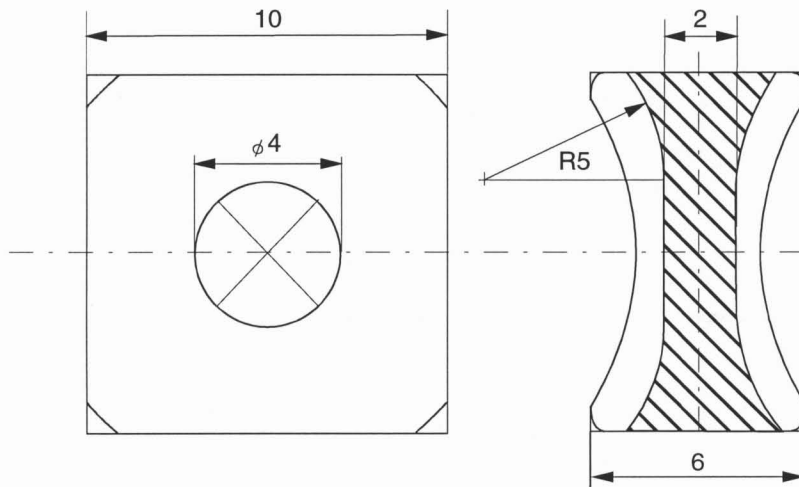


Bild 12/6: Optimierter Probekörper mit ebener Mulde

form wurde aufgrund folgender Anforderungen bestimmt:

- Probekörper mit konstanter Dicke versagen an den Kanten. Die Mitte des Probekörpers muß demnach geschwächt werden, um Randeinflüsse ausschließen zu können
- In der Mitte sollte ein möglichst großer Durchmesser konstanter Dicke realisiert werden, um einen Bereich nahezu homogener 2D-Druckspannungen zu erzeugen.

Bei der optimierten Probekörpergeometrie tritt genauso wie bei quaderförmigen Probekörpern ohne Vertiefung ein "chaotisches" Bruchverhalten auf, unabhängig von der Winkelstellung δ der Prüfvorrichtung; der Versuchsaufbau scheint damit für Bruchwinkeluntersuchungen ungeeignet. Bei den optimierten Probekörpern erfolgt das Versagen jedoch im ungestörten, ebenen Bereich der Mulde, so daß von diesen Probekörpern Aussagen über das Festigkeitsverhalten bei verschiedenen biaxialen Druckzuständen erhofft wurden.

Bruchspannungen bei verschiedenen Winkelstellungen δ :

Die vorstehenden Ausführungen haben aufgezeigt, daß eine Bestimmung des im Probekörper vorherrschenden Spannungszustands auf triviale Weise nicht möglich ist. Zunächst wurden daher fünf quaderförmige Probekörper auf einer konventionellen Prüfmaschine ohne G-Vorrichtung mit einer uniaxialen Druckkraft beaufschlagt. Diese Probekörper versagten bei einer Druckspannung von 206 ± 12 MPa. Nachfolgend wurden mit einer ebenen Mulde versehene Probekörper unter Verwendung der in *Bild 12/3* dargestellten G-Vorrichtung einer Prüfung unter verschiedenen Winkelstellungen unterzogen.

Bei einer Winkelstellung vom $\alpha = 0^\circ$ zeigten die Probekörper erste ZFB bei einer Prüfkraft von $24 \text{ kN} \pm 1,5 \text{ kN}$ auf. Um die Spannungen in der ebenen Kreisfläche der Probekörper bestimmen zu können, wurden auf diesen Versuchen basierende FE-Berechnungen durchgeführt. Den Rechnungen

wurde sowohl die "ideal elastische" als auch die "ideal steife" Belastungsvariante zugrunde gelegt. Unabhängig von der gewählten Belastungsvariante stellt sich in der Probekörpermitte eine Quer-Druckspannung σ_2 von etwa - 910 MPa ein. Diese extrem hohe Bruchspannung legt die Vermutung nahe, daß die Prüfvorrichtung als sehr steif betrachtet werden muß, da bei ungehinderter Querdehnung die zweite Quer-Druckspannung σ_3 für $\alpha = 0^\circ$ verschwinden würde.

Unter Zugrundelegung dieser Annahme wurden für die Winkelstellungen $\alpha = 0^\circ, 45^\circ$ anhand der Mittelwerte der ermittelten Bruchlasten für die "ideal steife" Belastungsvariante FE-Berechnungen durchgeführt. In *Bild 12/7* ist die – nach der Theorie im dritten Quadranten offene – Bruchkurve den so ermittelten Bruchspannungen gegenübergestellt (Der Meßpunkt auf der σ_2 - bzw. der σ_3 -Achse stammt aus Vorversuchen). Als Grundlage der theoretischen Bruchkurve diente auch hier das Modell #1 mit den in *Tabelle 6/2* definierten Werkstoffkennwerten ($m^{z,d} = -0,15$).

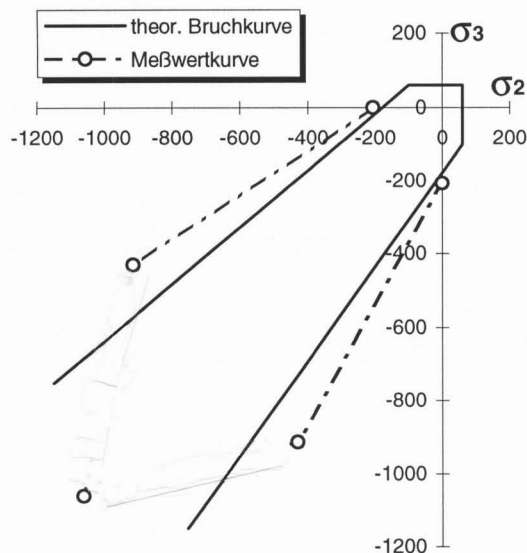


Bild 12/7: Auswertung der biaxialen Druckversuche

Bild 12/7 kann eine recht gute Übereinstimmung von Meßwert und Theorie für die Winkelstellungen $\alpha = 0^\circ$ entnommen werden. Für eine Winkelstellung $\alpha = 45^\circ$ wurden nach Durchführung der hydrostatischen Druckversuche deutlich höhere Bruchspannungen erwartet. Das frühere Versagen läßt sich hier vorrangig durch mit zunehmender Drucklast verstärkt auftretenden Reibeffekte zwischen den G-Elementen und der Probekörperoberfläche erklären. Diese Reibkräfte erzeugen infolge der in *Bild 12/3* angedeuteten und mit anwachsender Winkelstellung zunehmenden Relativbewegungen der G-Elemente Störspannungen in Form von Quer/Quer-Schubspannungen. Zusätzlich werden an der freien Probekörperoberfläche Quer-Längs-Schubspannungen in Dickenrichtung geweckt.

Die dargestellte Meßwertkurve hat vorrangig qualitativen Charakter, da über das tatsächliche Verhalten der G-Element-Vorrichtung keine endgültige Aussage getroffen werden konnte.

13 ERGEBNISDARSTELLUNG

13.1 Zusammenfassung der Versuchsergebnisse

13.1.1 Mehrachsige Bruchspannungen, Festigkeitswerte und Modellreibungskoeffizienten

Das Bild 13/1 zeigt die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurvenverläufe für einen GFK und einen CFK mit identischer Matrix. Die dargestellten Ergebnisse aus Versuchsreihen mit dem Z/D-T-Rohrprobekörper, sind die wichtigste Datenbasis für die Modelluntersuchungen und erlauben gleichzeitig eine Bewertung des für die meisten FKV-Bauteile bestimmenden ebenen Spannungszustands bzgl. ZFB.

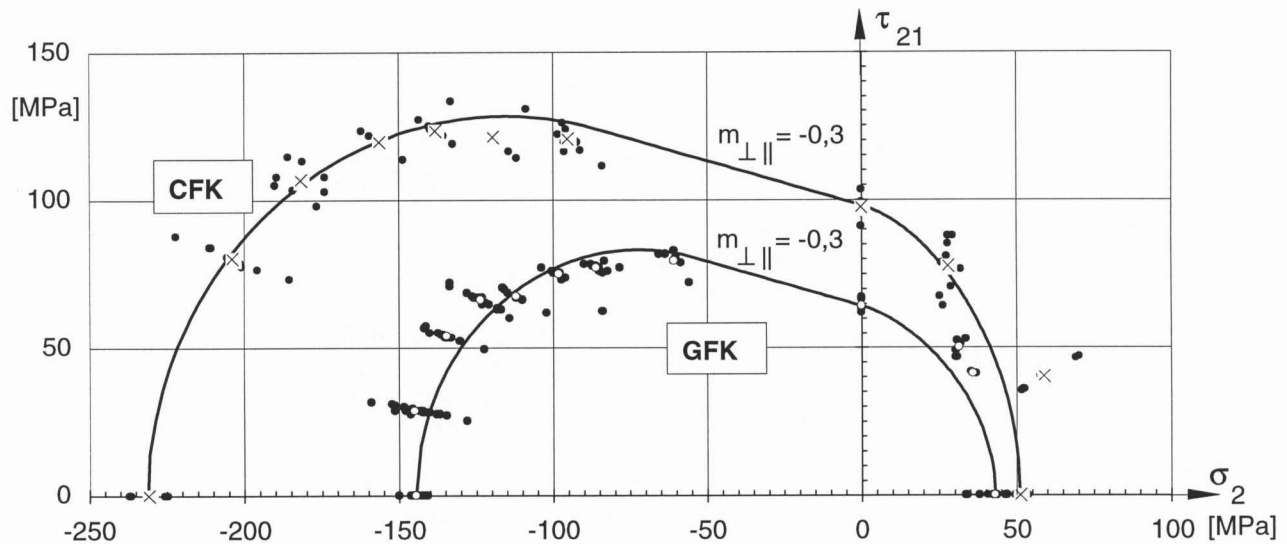


Bild 13/1: (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurven von CFK und GFK nach Gl. (13.8 bis 13.10); Z/D-T-Rohrprobekörper.
GFK: E-Glas / LY556, HT976, DY070; CFK: T300 / LY556, HT976

Theorie und Interpretation der Bruchkurven sind in Kapitel 1 bis 3 dargelegt. Weitere Bruchkurven aus der Datenanpassung und aus Versuchen befinden sich in Kapitel 4 und Kapitel 7.

Die statistische Auswertung der Versuche zur Bestimmung der Basis-Festigkeitswerte, die mit den Z/D-T-Rohrprobekörpern vorgenommen wurden, führt zu den Werten in Tabelle 13/1.

Tab. 13/1: Mittelwert $\bar{x} \approx \bar{R}$, Variationskoeffizient V und Stichprobengröße N der (Basis-)Festigkeitsversuche ($m_{\perp||}$ entstammt modellabhängiger Datenanpassung)

	E-Glas/Epoxid (A1)			T300/Epoxid (A3)		
	$\bar{x}$ [MPa]	V in %	N	$\bar{x}$ [MPa]	V in %	N
$R_{\perp}^z$	43	13	12	51	6	5
$R_{\perp }$	64	3	7	98	5	5
$R_{\perp}^d$	145	2	10	231	3	5
$-m_{\perp }$	0,3	-	-	0,3	-	-

Ein Ziel war, viele Versuche in Bereichen außerhalb der Achsenabschnitte durchzuführen, um die verschiedenen Modellansätze (Kapitel 2, 3, 4) bewerten zu können. Die kleine Stichprobengröße N in der Tabelle ist darauf zurückzuführen.

Alle nachfolgend aufgeführten Werte sind als Mittelwerte zu verstehen, sofern nicht ausdrücklich davon abgewichen wird.

Die Auswertung der Z/D-T-Versuchsergebnisse in Kapitel 4 führt bei allen im Abschnitt 13.3 empfohlenen Modellen im Druck-/Schubbereich zu der (negativen) Steigung $m_{\perp\parallel}$ bzw. zu dem Modellreibungskoeffizienten $\mu_{\perp\parallel}$. Für GFK und CFK ergeben sich Werte $0,15 \leq -m_{\perp\parallel} \leq 0,30$. Die Gültigkeitsgrenzen im Abschnitt 13.3 sind mit diesen Werten in der Regel eingehalten.

In Kap. 8 wurde eine Möglichkeit aufgezeigt, für die flexibleren Modelle (s. Gl. (13.14) und (13.15), sowie Gl. (13.20) bis (13.22)) aus einem reinen Querdruckversuch den Modellreibungskoeffizienten $\mu_{\perp\parallel}$ bzw. die (negative) Steigung $m_{\perp\parallel}$ zu bestimmen. Der an den GFK-Prismen ermittelte Bruchwinkel von $\theta_B^d = 54^\circ \pm 3^\circ$ führt beim parabolischen Ansatz von Puck zu $m_{\perp\parallel} = -0,45$ mit der gemessenen Querdruckfestigkeit $R_{\perp}^d = 106 \text{ MPa}$ und dem Wirkebenebruchwiderstand gegen transversalen Schub $R_{\perp\parallel}^M = 37 \text{ MPa}$ ($R_{\perp}^z$ ist nur 15 MPa). Aus den Datenauswertungen in Kapitel 4 ergibt sich die Tendenz, daß $m_{\perp\parallel}$ betragsmäßig größer als $m_{\parallel\parallel}$ ist - allerdings sind die (σ_2, τ_{21}) -Auswertungen nur wenig zur Schätzung von $m_{\perp\parallel}$ geeignet (s. Abschnitt 13.4). Auf die Gültigkeitsgrenzen, Gl. (13.16) bzw. (13.23), ist bei der Festlegung dieser Größe besonders zu achten.

Da die Gültigkeitsgrenzen für die absoluten Steigungen von der Form "kleiner als" sind, wird für Testrechnungen mit dem erweiterten Ausgangsmodell oder dem parabolischen Ansatz von Puck $m_{\perp\parallel} = -0,20$ und $m_{\parallel\parallel} = -0,20$ empfohlen. Beim einfachen parabolischen Modell kann der einzige Parameter p aus der Steigung $m_{\perp\parallel}$ bestimmt werden.

13.1.2 Bruchwinkel

Die Messung des Bruchwinkels θ_B dient der Verifizierung des Mohr-Coulombschen Ansatzes von Puck, der die Schubspannungen τ_{n1} und τ_{nt} gemeinsam erfassen läßt. Seine Messung wurde beim Querdruck-UD-Prisma (Kapitel 8), beim Torsionsring (Kapitel 9) und beim kerngestützten Rohr (Anhang I.2) als Hauptaufgabe betrachtet, beim geschichteten geraden Biegeträger (Kapitel 10) und beim biaxialen Querdruckversuch mit 'G'-Elementen (Abschnitt 12.2) war es ein wichtiger Nebenaspekt. Bei den hier vorgestellten wirkebenebezogenen Festigkeitskriterien interessiert vor allem die Frage, ob sich die theoretisch vorhergesagten Bruchwinkel θ_B experimentell bestätigen lassen.

Bei den einachsigen mit Quer-Druckbeanspruchung geprüften prismatischen Probekörper stellte sich der vorhergesagte, durch σ_n^d behinderte Schubbruch infolge τ_{nt} bei Bruchwinkeln von $\theta_B^d \approx 54^\circ$ tatsächlich ein (vgl. *Bild 8/5*). Bei den 25 geprüften Probekörpern zeigte sich im Meßbereich schlagartig ein klar ausgeprägter schräger Bruch, womit zusätzlich das erwartete Sprödbuchverhalten bestätigt wurde (vgl. *Bild 6/2*). Dieser Versuch konnte auch die Hypothese (H II') (vgl. Abschnitt. 2.4), nach der eine Druck-Normalspannung σ_n^d nicht zur Erzeugung eines ZFB beiträgt,

sondern den durch die Schubspannung τ_{nt} verursachten Schubbruch erschwert, bestätigen. Für den Querdruck-Versuch mit Reibungseffekten mußten Bruchwinkel erwartet werden, die größer als $\theta_B = 45^\circ$ sind. Die Zusammenhänge können dem Mohrschen Kreis für reine Querdruck-Beanspruchung entnommen werden (vgl. *Bild 8/1*).

Ausgehend von der am Biegebalken gesammelten experimentellen Erfahrung, daß nicht nur eine einachsige Quer-Zugbeanspruchung $\sigma_\perp^z$, sondern auch eine reine Quer/Quer-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\perp}$ einen Bruch in der Ebene höchster Zugbeanspruchung σ_n^z erzeugt (vgl. *Bild 10/7*), sollten die Torsionsringversuche verifizieren, inwieweit der Ansatz von Puck auch ein Zusammenwirken von σ_n^z mit den Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} korrekt erfaßt. Verlaufen die Fasern in der Prüfschicht des Torsionsrings in Umfangsrichtung, so entsteht im UD-Verbund eine τ_{31} -Spannung, auf der Wirkebene also eine Quer/Längs-Schubspannung τ_{n1} . Sind die Fasern in Axialrichtung des Rings angeordnet, entsteht durch die Torsion eine τ_{32} -Spannung, was eine Kombination aus Quer-Normalspannung σ_n^z und Quer/Quer-Schubspannung τ_{nt} auf der Wirkebene erzeugt. Bei allen anderen Faserorientierungen zwischen diesen beiden Grenzfällen entstehen unterschiedliche kombinierte (τ_{32}, τ_{31}) -Spannungszustände und damit auf Wirkebenen mit $\theta \neq 0^\circ$ kombinierte $(\sigma_n^z, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Spannungszustände.

Sowohl die Untersuchungen für einen Spannungszustand mit $\tau_{32}:\tau_{31} = 3,7$ als auch jene für $\tau_{32}:\tau_{31} = 1$ ergaben eine sehr gute Übereinstimmung zwischen berechnetem und experimentell ermitteltem Bruchwinkel θ_B . Der Bruchwinkel stieg – wie vom Bruchkriterium vorhergesagt – für $\alpha_f = 0^\circ$ von $\theta_B \approx 45^\circ$ bei nahezu axialer Faserorientierung auf $\theta_B \approx 58^\circ$ bei einer Faserorientierung $\alpha_f = 45^\circ$. Offenbar wird der Bruch durch eine Interaktion der Quer-Normalspannung σ_n^z und der resultierenden Schubspannung τ_n auf der Wirkebene höchster Bruchgefahr hervorgerufen. Es scheint also kein sprunghafter Wechsel zwischen den Bruchmodi Querkzugbruch (unter 45°) und Longitudinaler-Schubbruch ($\theta = 0^\circ$) stattzufinden.

Bei sorgfältiger Auswertung der Z/D-T-Probekörper kann auch an einigen von diesen für die Winkelauswertung zunächst als ungeeignet angesehenen Probekörpern ein Bruchwinkel gemessen werden. Das Ergebnis ist allerdings nur bedingt aussagekräftig, da der Einfluß von Biege-Normalspannungen nicht untersucht wurde und auch die Bestimmung des Bruchanfanges nicht immer eindeutig durchzuführen war. Der Bruchwinkel scheint bei den GFK-Probekörpern zwischen den Lastpfaden 6 und 7 von $\theta_B = 0^\circ$ auf $\theta_B = 46^\circ$ anzusteigen und bei Lastpfad 9 seinen Endwert von $\theta_B = 58^\circ$ anzunehmen (*Bild 13/2*). Entsprechendes ist auch den Auswertungen an den CFK-Rohrprobekörpern zu entnehmen (*Bild 13/3*).

Während mit Bestimmtheit feststeht, daß es neben einem Bereich der Interaktion von Quer-Normalzugspannung σ_n^z und Longitudinal-Schubspannung τ_{n1} ($\theta_B = 0^\circ$, $\sigma_2 > 0$) auch einen Bereich rein longitudinalen Schubbruchs mit bruchbehindernder Quer-Normaldruckspannung σ_n^d ($\theta_B = 0^\circ$, $\sigma_2 < 0$) gibt, können die Z/D-T-Versuche nicht eindeutig belegen, ob es zu einem sprunghaften Wechsel oder aber steilen, jedoch kontinuierlichen Anstieg des Bruchwinkels im Buckelbereich kommt.

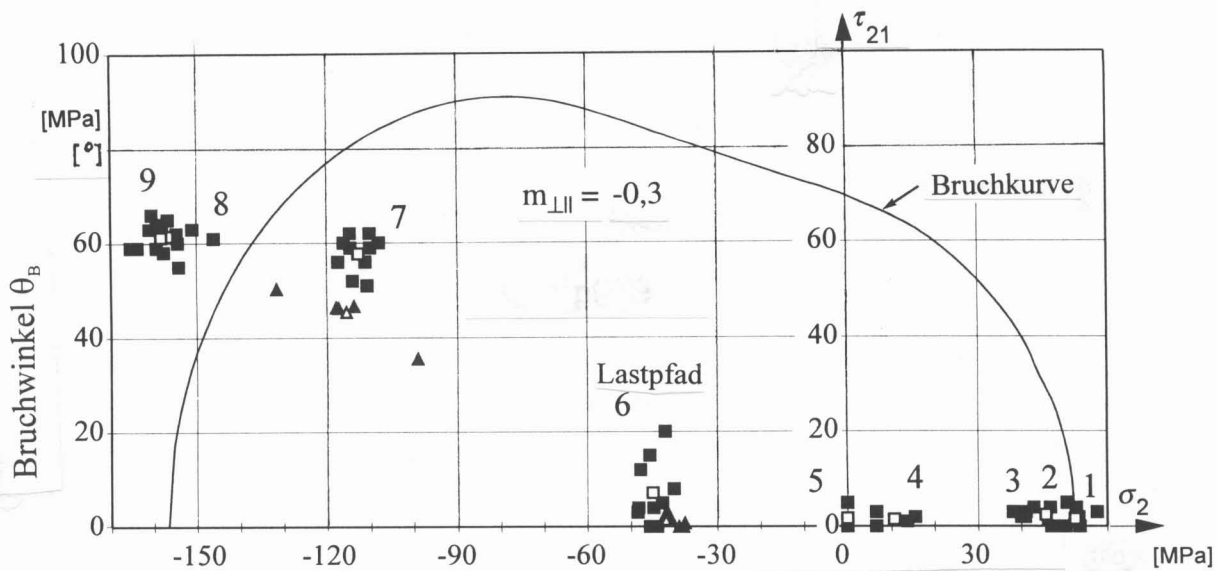


Bild 13/2: Experimentell und rechnerisch ermittelter Bruchwinkel θ_B . GFK

(Δ Winkelverbund, $\blacksquare$ Parallelwicklungsverbund, Δ , $\square$ zugehörige Mittelwerte. Bruchtestdaten s. Bild 7/5))

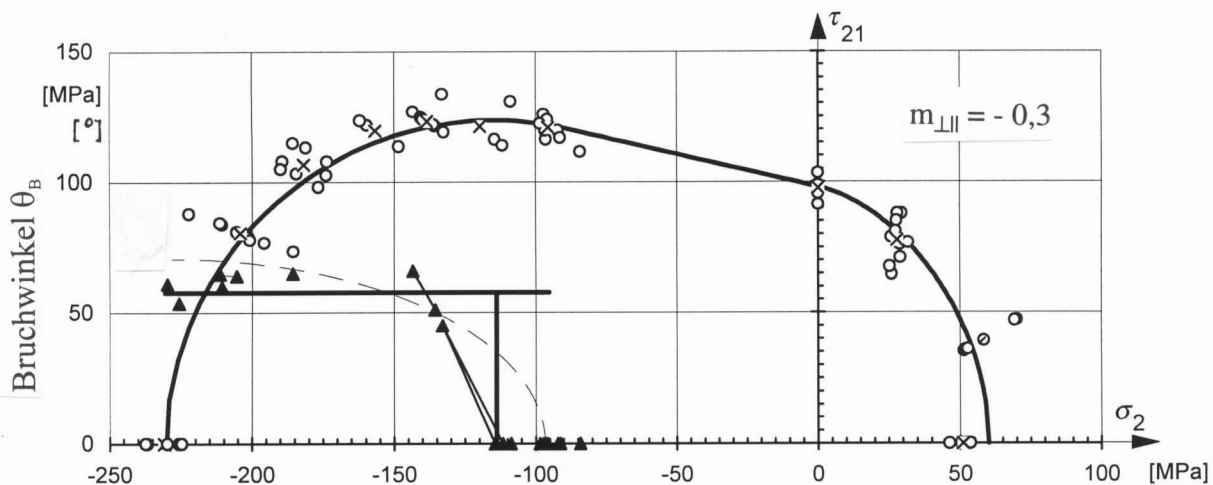


Bild 13/3: Versuchsdaten sowie Sprung und kontinuierlicher theoretischer Verlauf des Bruchwinkels am CFK-Standard-Rohrprobekörper (T300/LY556, HT976). $\times$ = Mittelwerte der Bruchspannungen auf einem Laststrahl. ($\blacktriangle$ — $\blacktriangle$ kennzeichnet die auf einem Laststrahl gemessenen Bruchwinkel)

13.2 Diskussion verschiedener experimenteller und theoretischer Randfragen

13.2.1 Begrenzung des ZFB-Körpers im biaxialen Querdruckbereich

Isotrope, nicht poröse Werkstoffe können unendlich hoch hydrostatisch beansprucht werden. Unter biaxialer Druckbeanspruchung erleiden sie jedoch Schubbruch. In UD-Schichten verhindern die Fasern einen solchen Schubbruch solange, bis sie aufgrund der Querkontraktion Faserbruch erfahren. Die Ergebnisse der Versuchsreihe "Quetschnut" (Kap. 8) zeigen, daß die Faserbruchspannung (Bruchdehnung) zwar nicht ganz erreicht wird, aber der Probekörper biaxial bis etwa $\sigma_2^d = \sigma_3^d \approx -8R_{\perp}^d$ beansprucht werden kann, ohne daß Bruch erreicht wird. Der ZFB-Körper wird in der (σ_2, σ_3) -Ebene im dritten Quadranten durch den FB-Körper begrenzt, sofern der Werkstoff porenfrei ist und keine Freie-Rand-Effekte vorliegen (s. Stirnfläche bei der Quetschnut).

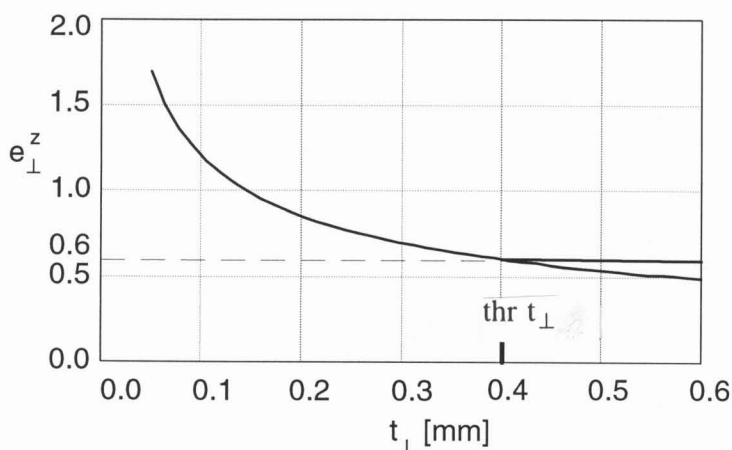
Die Auswertung der Versuche ergab, daß die theoretische ZFB-Bruchgrenze schon mehrfach übertroffen worden war, ehe Bruch auftrat, und zwar nicht ZFB, sondern wahrscheinlich Schubbruch der Matrix mit nachfolgendem FB. Durch die Behinderung der Ausdehnung in Querrichtung konnte sich ZFB jedoch nicht ausbilden.

13.2.2 Modellannahme "spröder" FKV

Die obige Modellannahme wurde durch Hochgeschwindigkeitsaufnahmen im UD-Prisma-Druckversuch (IKV), Druckversuche mit Matrix-Probekörpern (MAN) und Druckversuche bei den auf Druck belasteten Z/D-T-Probekörpern unterstützt. Eingeschlossene Fasern steigern noch die Sprödigkeit gegenüber einer reinen Matrix.

13.2.3 Der "Dünne-Schicht-Effekt" eingebetteter 90°-Schichten

Schon seit vielen Jahren ist bekannt, daß das $\sigma_{\perp}^z$ -Niveau, bei dem ZFB in eingebetteten 90°-UD-Schichten initiiert wird, sowohl von der absoluten Dicke der betrachteten UD-Schicht als auch den Steifigkeiten der Nachbarschichten bzw. des SV abhängt. Die eingebettete ES wird gegenüber der freien UD-Schicht (der UD-Probekörper stellt ein "weakest link"-Problem dar) durch den SV dehnungsgesteuert, so daß sich auf dem zu $R_{\perp}^z$ (Probekörper) gehörigen Bruchdehnungsniveau $e_{\perp}^z$ aus den inhärenten Defekten noch keine sich öffnenden Querrisse ausbilden können (Rißarresteffekt als meso-bruchmechanisches Problem). Dieser Effekt nimmt mit zunehmender ES-Dicke ab [Par78, Fla82, Ogi85, Pet87, Var91] und ist z.B. ab etwa $t_{90^\circ} = t_{\perp} > 0.40$ mm bei CFK z.B. vernachlässigbar. Es wäre noch zu überprüfen, ob die Erfassung dieses Effekts bei Verwendung einer den Dickenparameter berücksichtigenden einfachen Interpolationskurve von Testdaten [Cun 93b] vom ingenieurmäßigen Standpunkt ausreichend ist.



$$R_{\perp}^z(t_{\perp}) \approx R_{\perp}^z \sqrt{\text{thr } t_{\perp} / t_{\perp}}$$

$\text{thr } t_{\perp}$ = Grenzwert der 90°-Schicht, unter dem der Effekt spürbar wird

Bild 13/4: "Dünne Schicht Effekt"-Korrektur. $e_{\perp}^z \sim R_{\perp}^z$ ([Par78] und eigene Messungen)

13.2.4 Mikromechanische Analysen zum (σ_2, τ_{21}) -Verlauf

Bruchkurven, wie die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve, werden üblicherweise über den Lastspannungen σ_2, τ_{21} der Schicht aufgetragen. Der Verlauf ist im wesentlichen aber das Ergebnis des räumlichen

Zusammenwirkens aller *Spannungen*, d.h. sowohl der Lastspannungen (primär) als auch der Aushärteeigenstressen. Er zeigt an, wann $\max \sigma_m^z = R_m^z$ in der Matrix initiiert wird. Das Interface wird integral mit der Matrix zusammen betrachtet, d.h., es wird hier nicht zwischen kohäsivem Versagen der Matrix oder adhäsivem der Interphase im Interface unterschieden.

Wesentliche Resultate der Analysen (Voraussetzung gleiche Matrix) sind:

- Bei CFK liegt ein gleichmäßigerer Spannungsverlauf in Querrichtung gegenüber GFK vor (in dieser Richtung ist die C-Faser weniger steif als die Glasfaser)
- Für die Praxis gilt bei gleicher Matrix $\mu_{\perp\parallel}(\text{CFK}) = \mu_{\perp\parallel}(\text{GFK})$
- Die Aushärteeigenstressen wirken sich bei $R_{\perp}^z$ negativ, bei $R_{\parallel}$ positiv und bei $R_{\perp}^d$ stark negativ aus
- "Buckel" und (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve können allein schon durch die Überlagerung der Lastspannungen σ_2 mit τ_{21} erklärt werden. Die Aushärteeigenstressen haben geringeren Einfluß.

Zum besseren Verständnis der mikromechanischen Analysen visualisiert Bild 13/5, wie sich die verschiedenen (σ, τ) -Bruchkurven von Matrix und FKV zuordnen.

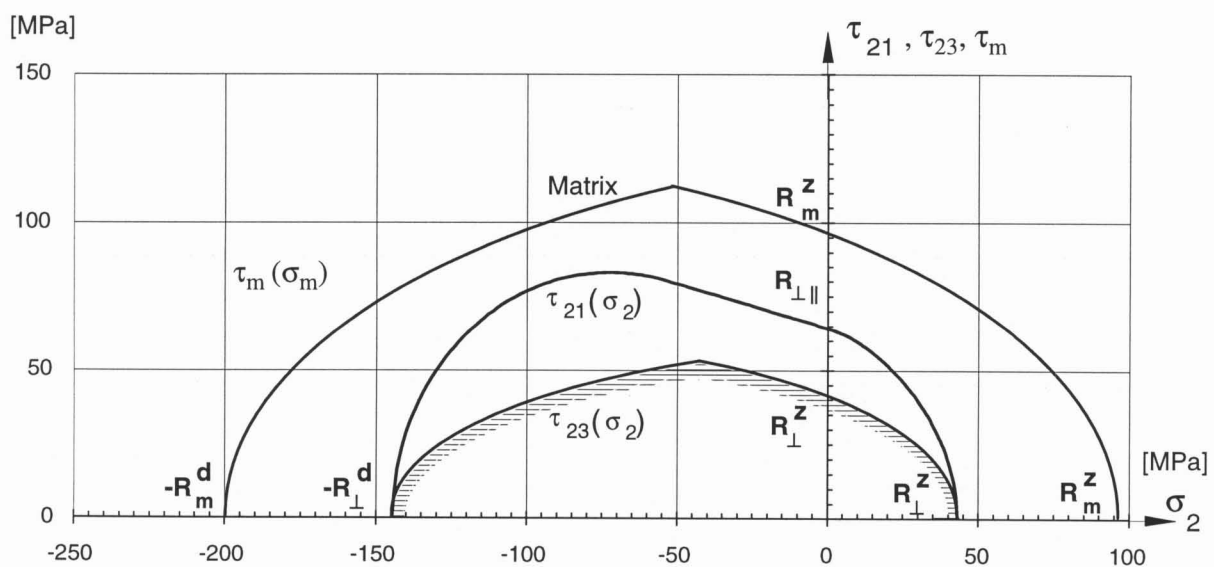


Bild 13/5: (σ, τ) -Bruchkurven von Matrix und GFK (Index m für Matrix)

13.2.5 Abschätzung der biaxialen Querkzug-Bruchspannung $\sigma_{\perp B}^{zz}$:

Infolge der schwierigen Herstellung qualitativ guter Probekörper und des praktisch nicht verwirklichtbaren homogenen Spannungszustands war die Messung dieser Größe nicht möglich. Allerdings läßt sich der Wert, wenn die Weibull-Verteilung von $R_{\perp}^z$ bekannt ist, recht einfach mit Hilfe des Variationskoeffizienten V abschätzen (siehe [Awa77, Pli 95], k = sog. Weibullmodul):

$$\bar{\sigma}_{\perp B}^{zz} = \bar{R}_{\perp}^z / \sqrt{k} \quad \text{mit} \quad k \approx 1,2 / V.$$

13.3 Mohrsche Bruchbedingungen für die Praxis

13.3.1 Allgemeines zur Auswahl der Modelle

Ausgehend vom mechanisch anschaulichen erweiterten Ausgangsmodell (Gl. (2.37) und (2.39) bzw. (13.14) und (13.15)) wurden in Kapitel 3 und 4 neben diesem Modell verschiedene parabolische Ansätze mit 4 bis 7 Parametern untersucht. Dabei hat sich bei der Anpassung an Daten aus den klassischen (σ_2, τ_{21}) -Versuchen gezeigt, daß sich hoch-flexible Modelle nicht signifikant besser anpassen lassen als der differenzierbare einfache parabolische Ansatz (3.4), (3.5) bzw. (13.1), (13.2) mit 4 Parametern (3 Basisfestigkeiten, 1 Steigungsparameter). Die Festlegung der Steigungsparameter der Modelle auf der Basis der gemessenen Bruchwinkel θ_B^d aus dem reinen Druckversuch mit $\sigma_2 = -R_\perp^d$ hat teilweise zu Widersprüchen zur Anforderung (A VIII) geführt, wonach bei reiner Quer-Schubspannung τ_{23} der Bruch unter dem Winkel von 45° erfolgt, und zu Widersprüchen zur Anforderung (A IX), wonach bei der (σ_2, σ_3) - Bruchkurve im zweiten und vierten Quadranten ein scharfes Umspringen vom Quer-Zugbruch zum reinen Schubbruch stattfindet (Abschnitt 3.1). Insbesondere die aus der Hypothese (H III) von Puck resultierende Anforderung (A IX) ist häufig mit den gemessenen Bruchwinkeln θ_B^d - unabhängig vom gewählten Modell - nicht vereinbar (Die Anforderung (A IX) impliziert kleinere Bruchwinkel θ_B^d als die gemessenen). Eine Anpassung der Steigungsparameter an den Bruchwinkel θ_B^d sollte daher immer durch entsprechende Daten aus (σ_2, σ_3^d) - bzw. (σ_2^d, τ_{23}) - Versuchen abgesichert werden (Abschnitt 4.3).

Aus den dargelegten Gründen werden für die Praxis die homogenen Bruchbedingungen (3.4), (3.5) auf der Basis des differenzierbaren einfachen parabolischen Ansatzes empfohlen. Die Bruchbedingungen sind einfach zu handhaben, numerisch robust und schnell. Zudem kann bei diesem Modell die (σ_2, τ_{21}) - Bruchkurve samt Bruchwinkeln analytisch berechnet werden. Ein weiterer Vorteil liegt darin, daß die Anforderungen (A VIII) und (A IX) in Form von Gültigkeitsgrenzen für den Steigungsparameter explizit angegeben werden können und damit leicht zu überprüfen sind.

Falls gesicherte Bruchwinkelwerte θ_B^d vorliegen und ein flexibleres Modell gewünscht wird, kann entweder auf das erweiterte Ausgangsmodell (2.37), (2.39) bzw. (13.14), (13.15) oder auf den differenzierbaren parabolischen Ansatz (3.14), (3.15) bzw. (13.20), (13.21) von Puck mit je 5 Parametern (3 Basisfestigkeiten, 2 Steigungsparameter) zurückgegriffen werden. Das erweiterte Ausgangsmodell ist numerisch etwas aufwendiger, da es nicht homogen ist. Das parabolische Modell von Puck ist homogen, aber es kommt für $\sigma_n \rightarrow -\infty$ zur Einschnürung der Masterfläche (*Bild 3/5*). Bei der Auswertung von Bruch-Spannungszuständen ist daher darauf zu achten, daß man sich auf den konvexen Bereich der Masterfläche beschränkt (vgl. Abschnitt 13.3.4).

In *Bild 13/6* sind die von den empfohlenen Modellen erzeugten charakteristischen Bruchkurven noch einmal zusammengestellt.

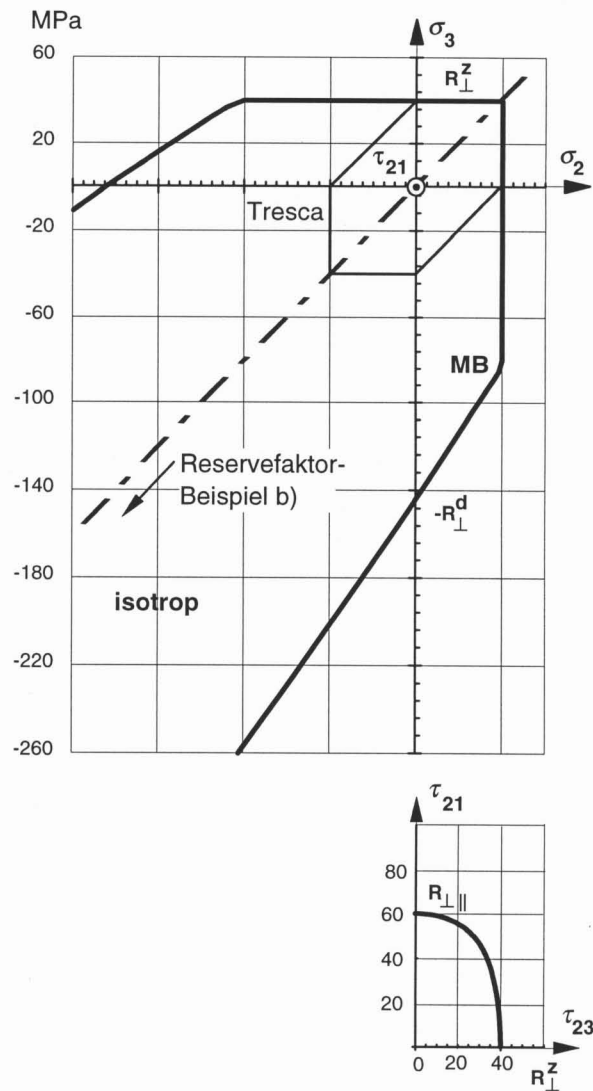
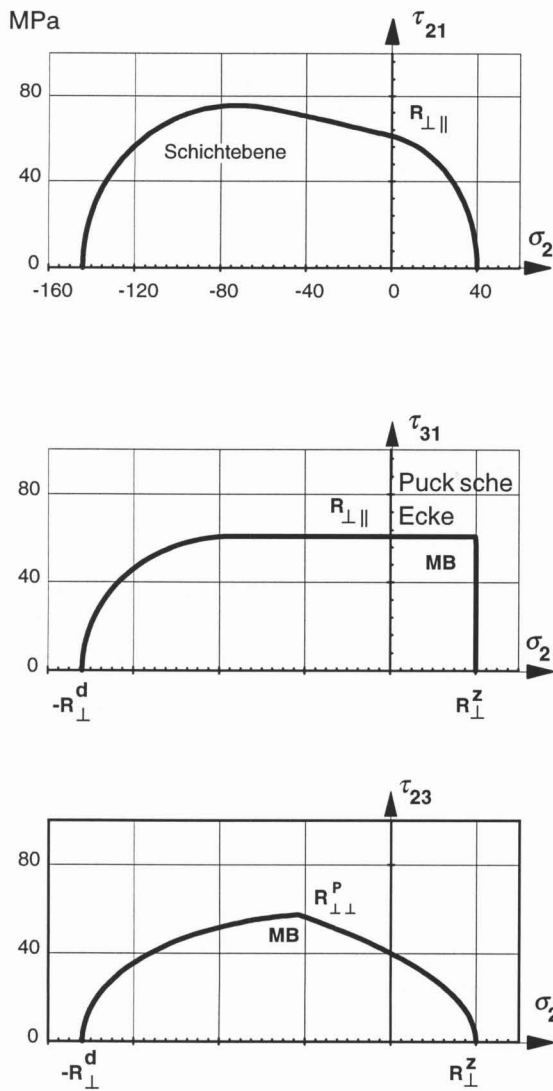


Bild 13/6: Ebene Schnitte durch den $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{21}, \tau_{31}, \tau_{23})$ -Bruchkörper, Mittelwertkurve, parabolisches Modell Gln. (13.1) und (13.2).

$R_{\perp}^z = 40 \text{ MPa}$; $R_{\perp\parallel} = 61 \text{ MPa}$; $R_{\perp}^d = 144 \text{ MPa}$; $p = 0,152$;
 $m_{\perp\parallel} = -0,228$; $m_{\perp\perp} = -0,224$; $\Rightarrow R_{\perp\perp}^M = 54 \text{ MPa}$; MB = Mischbruchbereich.

13.3.2 Einfaches parabolisches Modell

Die homogenen Bruchbedingungen (3.4), (3.5) bzw. Modell #1 in Kapitel 4 auf der Basis des differenzierbaren einfachen parabolischen Ansatzes lauten mit $p := p^z$, $p^d = p R_{\perp}^d / R_{\perp}^z$ [Jel 96a]:

$$\sqrt{(1-p)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + p \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (13.1)$$

$$\sqrt{p^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + p \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0, \quad (13.2)$$

wobei die Einschränkung des Gültigkeitsbereichs

$$0 < p < 1 - \left(\frac{R_{\perp}^z}{R_{\perp}^M} \right)^2 \quad (13.3)$$

einzuhalten ist. Dies impliziert $R_{\perp}^z < R_{\perp}^M$, was für alle Modelle gilt. Mit (13.3) ist die Anforderung (A VIII) erfüllt - der Bruch erfolgt bei reiner Quer-Schubspannung τ_{23} unter dem Winkel $\theta_B = 45^\circ$. Falls zusätzlich der Hypothese (H III) von Puck, d.h. der Anforderung (A IX), Rechnung getragen werden soll, ist anstelle von (13.3) die stärkere Einschränkung

$$0 < p < \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{R_{\perp}^z}{R_{\perp}^M} \right)^2 \right] \quad (13.4)$$

zu berücksichtigen. Die Einschränkung (13.3) kann man auch direkt mit den Steigungen

$$-m_{\perp\parallel} < \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^z} \left[1 - \left(\frac{R_{\perp}^z}{R_{\perp}^M} \right)^2 \right], \quad -m_{\perp\perp} < \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^z} \left[1 - \left(\frac{R_{\perp}^z}{R_{\perp}^M} \right)^2 \right] = \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^z} - \frac{R_{\perp}^z}{R_{\perp}^M}$$

formulieren. Es bestehen die Zusammenhänge (Bilder 3/1, 3/2, 3/3)

$$R_{\perp\perp}^M = \frac{R_{\perp}^d}{1 + \sqrt{1 + 2p R_{\perp}^d / R_{\perp}^z}} = R_{\perp}^d \cos^2 \theta_B^d, \quad (13.5)$$

$$p = \frac{R_{\perp}^z}{2R_{\perp}^d} (\tan^4 \theta_B^d - 1) \quad \text{sowie} \quad -m_{\perp\parallel} = p \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^z}, \quad -m_{\perp\perp} = p \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^z}. \quad (13.6), (13.7)$$

Die drei (Basis-) Festigkeiten $R_{\perp}^z$, $R_{\perp}^d$, $R_{\perp\parallel}$ und p sind freie Parameter; $R_{\perp\perp}^M$ ist ein abhängiger Parameter. Der Steigungsparameter p kann entweder gemäß (13.7) über die Steigung $m_{\perp\parallel}$ der (σ_2, τ_{21}) - Bruchkurve an der Stelle $\sigma_2 = 0$ oder gegebenenfalls gemäß (13.6) über den Bruchwinkel θ_B^d angepaßt werden. Wenn genügend Meßpunkte vorliegen, sollte die Anpassung mittels eines Fehlerquadrat-Verfahrens erfolgen wie in Abschnitt 4.1 beschrieben.

Da die linken Seiten von (13.1) und (13.2) homogen vom Grad 1 sind, geben sie für einen beliebigen Spannungsvektor $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ direkt die Bruchgefahr an. Läßt man den Neigungswinkel θ der faserparallelen Schnittebene von -90° bis $+90^\circ$ variieren, so ist das globale Maximum der Bruchgefahr die Anstrengung; die globalen Maximalstellen zeigen die möglichen Bruchwinkel an (s. hierzu Abschnitt 2.2.2).

Für den ebenen Spannungszustand (σ_2, τ_{21}) können Bruchwinkel θ_B und Bruchkurve analytisch bestimmt werden (Gl. (3.4), (3.5), (3.12)):

$$\sqrt{(1-p)^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + p \frac{\sigma_2}{R_{\perp}^z} = 1, \quad \theta_B = 0^\circ \quad \text{für} \quad \sigma_2 \geq 0, \quad (13.8)$$

$$\sqrt{p^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + p \frac{\sigma_2}{R_{\perp}^z} = 1 \quad , \quad \theta_B = 0^\circ \quad \text{für } -R_{\perp\parallel}^M \leq \sigma_2 < 0, \quad (13.9)$$

$$-\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^d} - \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}(1 + \sqrt{1 + 2pR_{\perp}^d / R_{\perp}^z})} \right)^2 \frac{R_{\perp}^d}{\sigma_2} = 1 \quad , \quad \theta_B = \pm \arccos \sqrt{R_{\perp\parallel}^M / |\sigma_2|} \quad \text{für } -R_{\perp}^d \leq \sigma_2 < -R_{\perp\parallel}^M.$$

(Da wie üblich der Faktor f_{Res} weggelassen ist, sind σ_2 und τ_{21} *Bruchspannungen*.) (13.10)

Die linken Seiten in (13.8), (13.9) und (13.10) geben für einen beliebigen Spannungszustand (σ_2 , τ_{21}) direkt die Anstrengung $A = A(\sigma_2, \tau_{21})$ an (vorausgesetzt, daß keine Eigenspannungen zu berücksichtigen sind); d.h., es gilt:

$$A = \sqrt{(1-p)^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + p \frac{\sigma_2}{R_{\perp}^z} \quad , \quad \theta_B = 0^\circ \quad \text{für } \sigma_2 \geq 0, \quad (13.11)$$

$$A = \sqrt{p^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + p \frac{\sigma_2}{R_{\perp}^z} \quad , \quad \theta_B = 0^\circ \quad \text{für } \sigma_2 < 0, \quad \left| \frac{\tau_{21}}{\sigma_2} \right| \geq \frac{\tau_s}{R_{\perp\parallel}^M} \quad , \quad (13.12)$$

$$A = -\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^d} - \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}(1 + \sqrt{1 + 2pR_{\perp}^d / R_{\perp}^z})} \right)^2 \frac{R_{\perp}^d}{\sigma_2} \quad , \quad \theta_B = \pm \arccos \sqrt{\frac{A \cdot R_{\perp\parallel}^M}{|\sigma_2|}} \quad \text{für } \sigma_2 < 0, \quad \left| \frac{\tau_{21}}{\sigma_2} \right| < \frac{\tau_s}{R_{\perp\parallel}^M}. \quad (13.13)$$

Hierin ist $\tau_s = R_{\perp\parallel} \sqrt{1 + 2pR_{\perp\parallel}^M / R_{\perp}^z}$ der positive τ_{21} -Wert der Bruchkurve an der Schnittstelle $\sigma_2 = -R_{\perp\parallel}^M$ der beiden im Druckbereich geltenden Bruchbedingungen (*Bild 3/3*).

13.3.3 Erweitertes Ausgangsmodell (inhomogen)

Falls zur besseren Anpassung flexiblere Bruchbedingungen mit zwei unabhängigen Steigungsparametern benötigt werden, empfiehlt sich das mechanisch anschauliche erweiterte Ausgangsmodell [Pli 95], das allerdings numerisch aufwendiger ist (siehe Gl.(2.37), (2.39) bzw. Modell #4 in Kap. 4):

$$\left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\parallel}^M - \mu_{\perp\perp} \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel} - \mu_{\perp\parallel} \sigma_n} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0 \quad , \quad (13.14)$$

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\parallel}^M - \mu_{\perp\perp} \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel} - \mu_{\perp\parallel} \sigma_n} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0 \quad , \quad (13.15)$$

wobei die Gültigkeitsgrenzen

$$0 \leq \mu_{\perp\perp} < \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^z} \quad , \quad 0 \leq \mu_{\perp\parallel} < \frac{R_{\perp\parallel}^M}{R_{\perp}^z} - 1 \quad (13.16)$$

einzuhalten sind. Mit der letzten Einschränkung des Gültigkeitsbereiches in (13.16) ist Anforderung (A VIII) erfüllt. Anforderung (A IX) ist im konkreten Fall zu überprüfen. Es bestehen die Zusam-

menhänge

$$R_{\perp\perp}^M = \frac{R_{\perp\perp}^d}{2} \left(\sqrt{1 + \mu_{\perp\perp}^2} - \mu_{\perp\perp} \right) = \frac{R_{\perp\perp}^d}{2} \cot |\theta_B^d|, \quad (13.17)$$

$$\mu_{\perp\perp} = -\cot 2|\theta_B^d| \quad \text{sowie} \quad -m_{\perp\parallel} = \mu_{\perp\parallel}, \quad -m_{\perp\perp} = \mu_{\perp\perp}. \quad (13.18), (13.19)$$

Die drei (Basis-) Festigkeiten $R_{\perp^z}$, $R_{\perp^d}$, $R_{\perp\parallel}$ und die beiden Modellreibungskoeffizienten $\mu_{\perp\parallel}$ und $\mu_{\perp\perp}$ sind freie Parameter; $R_{\perp\perp}^M$ ist ein abhängiger Parameter. Der Koeffizient $\mu_{\perp\parallel}$ wird gemäß (13.19) über die Steigung $m_{\perp\parallel}$ der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve an der Stelle $\sigma_2 = 0$ angepaßt. Der Koeffizient $\mu_{\perp\perp}$ wird gemäß (13.18) über den Bruchwinkel θ_B^d aus dem reinen Druckversuch mit $\sigma_2 = -R_{\perp^d}$ und/oder entsprechenden Daten aus (σ_2^d, σ_3^d) - evtl. auch (σ_2^d, τ_{23}) - Versuchen bestimmt. Wenn genügend Meßpunkte vorliegen, sollte man beide Koeffizienten (Steigungen) mittels eines Fehlerquadratverfahrens anpassen.

Dieses Modell ist inhomogen, d.h., im Unterschied zum homogenen einfachen parabolischen Modell (Gl. (13.1) und (13.2)) ist der Wert der linken Seite der Bruchbedingung $F(\dots)$ nicht gleich der Bruchgefahr. Hier muß der Streckungsfaktor oder die Bruchgefahr numerisch durch eine Nullstellensuche gefunden werden (siehe auch Abschnitt 2.2.2.) Die Ermittlung der Bruchgefahr aus (13.14), (13.15) mit $\mu_{\perp\parallel} \cdot \mu_{\perp\perp} > 0$ führt im Fall $\sigma_n > 0$ auf ein Polynom sechsten Grades mit einer positiven Nullstelle, im Fall $\sigma_n < 0$ auf ein Polynom vierten Grades mit höchstens einer positiven Nullstelle. Die positive Nullstelle gibt die Bruchgefahr an. Wenn im Fall $\sigma_n < 0$ keine positive Nullstelle existiert, ist die Bruchgefahr gleich Null zu setzen.

13.3.4 Parabolisches Modell nach Puck

Eine ebenfalls flexible Bruchbedingung mit mehreren unabhängigen Steigungsparametern ist der homogene parabolische Ansatz (3.14), (3.15) von Puck [Puc 96a]. Aus mikromechanischen Gründen (Abschnitt 4.5) und um zusätzlichen Totraum zu vermeiden, wird empfohlen, den Ansatz (3.14), (3.15) in der differenzierbaren Form mit $p_{\perp\parallel}^z = p_{\perp\parallel}^d =: p_{\perp\parallel}$, $p_{\perp\perp}^z = p_{\perp\perp}^d =: p_{\perp\perp}$ zu verwenden:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{R_{\perp^z}} - q\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + q\sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (13.20)$$

$$\sqrt{(q\sigma_n)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^M}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + q\sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0 \quad (13.21)$$

$$\text{mit} \quad q := \begin{cases} \frac{1}{\tau_{nt}^2 + \tau_{nl}^2} \left(\frac{p_{\perp\perp}}{R_{\perp\perp}^M} \tau_{nt}^2 + \frac{p_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}} \tau_{nl}^2 \right), & \text{falls } \tau_{nt}^2 + \tau_{nl}^2 > 0, \\ 0, & \text{falls } \tau_{nt}^2 + \tau_{nl}^2 = 0. \end{cases} \quad (13.22)$$

Für die Steigungsparameter $p_{\perp\parallel}$, $p_{\perp\perp}$ gelten die Grenzen

$$0 < p_{\perp\parallel} < \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^z}, \quad 0 < p_{\perp\perp} < \frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^z} - \frac{R_{\perp}^z}{R_{\perp\perp}^M}, \quad (13.23)$$

wobei mit der letzten Einschränkung des Gültigkeitsbereiches Anforderung (A VIII) erfüllt ist. Anforderung (A IX) führt auf die stärkere Einschränkung

$$0 < p_{\perp\perp} < \frac{1}{2} \left[\frac{R_{\perp\perp}^M}{R_{\perp}^z} - \frac{R_{\perp}^z}{R_{\perp\perp}^M} \right]. \quad (13.24)$$

Es bestehen die Zusammenhänge

$$R_{\perp\perp}^M = \frac{R_{\perp}^d}{2(1+p_{\perp\perp})} = R_{\perp}^d \cos^2 \theta_B^d, \quad (13.25)$$

$$p_{\perp\perp} = \frac{1}{2} (\tan^2 \theta_B^d - 1) \quad \text{sowie} \quad -m_{\perp\parallel} = p_{\perp\parallel}, \quad -m_{\perp\perp} = p_{\perp\perp}. \quad (13.26), (13.27)$$

Die Steigungsparameter werden wie beim Modell in Abschnitt 13.3.3 angepasst.

Die Bruchbedingungen (13.20), (13.21) sind homogen. Das Eintreten der Einschnürung der Masterfläche (*Bild 3/5*) hängt von den beiden Verhältnissen

$$\frac{m_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}} : \frac{m_{\perp\perp}}{R_{\perp\perp}^M}, \quad R_{\perp\parallel} : R_{\perp\perp}^M \quad (13.28)$$

ab. Im konkreten Fall muß vor Anwendung dieser Bruchbedingungen der konvexe Bereich festgestellt werden. Bei Verwendung von Festigkeiten im Bereich derjenigen von Tab. 6/2 bleibt der Bruchkörper im Fall $0,4 < m_{\perp\parallel}/m_{\perp\perp} < 2,5$ bis zur 5-fachen Querdruckfestigkeit $R_{\perp}^d$ konvex; Verhältnismerte außerhalb dieser Grenzen sind in der Praxis nicht zu erwarten.

13.4 Bewertung und Anmerkungen zur Anwendung der Modelle

13.4.1 Bewertung der Modelle

Alle Modelle, die sich aus theoretischer Sicht nur durch Feinheiten unterscheiden, haben ungefähr gleiches Residuum für jeden der in Kapitel 4 untersuchten Datensätze. Auch die vorhergesagten Bruchwinkel θ_B^d unterscheiden sich wenig und fallen sämtlich in den Streubereich der Versuche. Aus dieser Sicht verdient also keines der Modelle den Vorzug vor den anderen. Die Unterschiede der Residuen für die verschiedenen Datensätze sind in der Herstellung der Probekörper und der Versuchstechnik begründet.

Die Anwendbarkeit der Mohrschen Hypothese im Sinne von Pucks Ansatz kann weder bestätigt noch verworfen werden, da zusätzliche, zusammen mit den (σ_2, τ_{21}) -Daten auswertbare Versuche in der dritten Richtung, d.h. in der (σ_2, τ_{23}) - oder (σ_2, σ_3) -Ebene einschließlich der entsprechenden Bruchwinkel, fehlen.

Die Resultate der Zug-/ Schubversuche liegen für Schubspannungen bis etwa $R_{\perp\parallel}/2$ in allen Versuchsreihen nahezu senkrecht über den reinen Zugversuchen (siehe z.B. *Bild 13/1*). Das, und die

relativ großen Streuungen, könnten darauf hinweisen, daß sich im Bereich $\sigma_2 > 0$ zwei Versagensmoden, Zugbruch und Längs-Schubbruch, überlagern.

Auch im Druckbereich $\sigma_2 < 0$ kann man die Überlagerung von 2 Bruchmoden nicht ausschließen. Darauf können vor allem die lokal größeren Streuungen im Bereich des Abkippens der Bruchebene ($\theta_B \neq 0^\circ$) hinweisen, wo entweder der eine oder der andere Schub-Bruchmodus auftritt (s. Bild 13/1).

Auch wenn die (makromechanische) Anwendbarkeit der Mohrschen Hypothese nicht gegeben wäre, können mit ihr jedoch praktische und wirklichkeitsnahe Bruchkriterien entwickelt werden.

Für eine Bewertung der verschiedenen Modelle sollten vornehmlich physikalische Gesichtspunkte maßgebend sein. Damit konnten einige der in Kapitel 4 untersuchten Modelle ausgeschlossen werden, da aus mikromechanischen Überlegungen heraus erwartet werden muß, daß die Bruchkurven für $\sigma_2 = 0$ nicht nur stetig sondern auch differenzierbar sind.

Man muß aufgrund makromechanischer Überlegungen erwarten, daß $R_{\perp\perp}^M$ etwas größer ausfällt als $R_{\perp\parallel}$. Beobachtet wird jedoch das Gegenteil. Das erweiterte Ausgangsmodell und das homogene parabolische Modell von Puck erlauben, den Fall $R_{\perp\perp}^M > R_{\perp\parallel}$ zu erfassen. Die Schätzung der Kurvenparameter nur aus (σ_2, τ_{21}) -Versuchen führt bei jedem der Datensätze zu numerischen Schwierigkeiten und inkonsistenten Ergebnissen (Verletzung der Anforderungen (A VIII) und (A IX)), da der zweite Parameter $\mu_{\perp\perp} = \mu_{nt}$ bzw. $m_{\perp\perp}$ aufgrund fehlender geeigneter Versuche nur schlecht geschätzt werden kann. Zur Schätzung von $\mu_{\perp\perp}$ bzw. $m_{\perp\perp}$ müssen zuverlässige Daten im Schubbruchbereich aus (σ_2^d, τ_{23}) - oder (σ_2, σ_3^d) -Versuchen vorliegen. Messungen des Bruchwinkels θ_B können nur bedingt zur Schätzung der Steigungsparameter herangezogen werden; zudem sind diese Messungen versuchstechnisch schwierig.

Eindeutige, analytisch ermittelbare Voraussagen sind nur beim einfachen parabolischen Modell (Gl. (13.1) und (13.2)) bei (σ_2, τ_{21}) -Versuchen möglich. In allen anderen Fällen muß θ_B über eine numerische Optimierung bestimmt werden (maximale Bruchgefahr). Dabei gibt es Spannungs-kombinationen, bei denen die Bruchgefahr mehrere lokale Maxima aufweist, θ_B also nicht eindeutig vorausgesagt werden kann. Für die Ermittlung von Anstrengung und Reservefaktor ist dieser Effekt unkritisch.

Für die Praxis wird empfohlen, die Mittelwerte der Basis-Festigkeitswerte vorab zu bestimmen und nur den oder die Steigungsparameter zu schätzen. Zur Schätzung des einen Steigungsparameters im einfachen parabolischen Modell genügen einige (σ_2, τ_{21}) -Versuche im Bereich der größten Schubfestigkeiten.

13.4.2 Sensitivität von Reservefaktor und Bruchwinkel

Während der Reservefaktor gegenüber kleinen Veränderungen der Masterfläche (Änderung der freien Parameter oder Modelländerung) stabil ist, kann der rechnerische Bruchwinkel äußerst sensibel reagieren (Abschnitt 4.4). Zusätzlich können mögliche Bruchwinkel durch Totraum verdeckt werden (Abschnitt 2.3).

Eine physikalische Interpretation des rechnerischen Bruchwinkels darf vorgenommen werden, wenn das gewählte Modell den Anforderungen (A I) - (A IX) genügt und einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

1. Der Spannungszustand ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$) ist durch Drehung des Schicht-KS um die x_1 -Achse in die Hauptachsen-Form ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, 0, 0, \tau_{III}$) transformierbar.
2. Die auf die Bruchebene wirkende Normalspannung $\sigma_n(\theta_B)$ liegt links vom Mittelpunkt des Mohrschen Grenzkreises (Abschnitt 2.3). Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

$$\sigma_n(\theta_B) < R_{\perp}^z - R_{\perp}^d / 2 \quad . \quad (13.29)$$

In den übrigen Fällen kann der reale Bruchwinkel mit der in Abschnitt 2.3 entwickelten Methode abgeschätzt werden, bei der die (unbekannte) reale Masterfläche zwischen einer minimalen und einer maximalen Masterfläche eingeschlossen wird. Das Verfahren ist allerdings mit einem beträchtlichen numerischen Aufwand verbunden.

13.4.3 Berücksichtigung von Eigenspannungen

Die vorgeschlagenen Bruchbedingungen sind bei Vorliegen von Eigenspannungen nur eingeschränkt verwendbar (da bei Eigenspannungen mit Vorschädigungen der Matrix gerechnet werden muß). Man sollte in diesem Fall das robuste Modell (13.1), (13.2) wählen. Die Ermittlung des Streckungsfaktors bezüglich des Lastspannungsvektors ($\sigma_n^{(L)}, \tau_{nt}^{(L)}, \tau_{nl}^{(L)}$) führt auf eine quadratische Gleichung, d.h., der Streckungsfaktor kann explizit berechnet werden (Abschnitt 2.5). Die Entscheidung, welche der beiden Bruchbedingungen (13.1), (13.2) anzuwenden ist, hängt davon ab, ob der Strahl in Richtung des an den Eigenspannungsvektor ($\sigma_n^{(E)}, \tau_{nt}^{(E)}, \tau_{nl}^{(E)}$) gebundenen Lastspannungsvektors ($\sigma_n^{(L)}, \tau_{nt}^{(L)}, \tau_{nl}^{(L)}$) die Ebene $\sigma_n = 0$ durchstößt und wenn ja, ob der Durchstoßpunkt innerhalb oder außerhalb des Masterkörpers liegt.

13.5 Bisherige Implementierungen der neuen Bruchkriterien

Einbindungen der Ergebnisse des Forschungsvorhabens in Software zur Visualisierung und in vorhandene FE-Programmsysteme zur Dimensionierung von FKV-Laminaten sind bereits erfolgt, wobei unterschiedliche Modelle implementiert wurden:

BRUKAN 96:

Die Visualisierung der in Kapitel 3 beschriebenen Bruchkriterien durch Bruchkurven und der Bruchwinkellage durch Bruchgefahrkurven wurde mit dem im Projekt entwickelten Programm **BRUKAN (Bruch-Kurven-Analyse des ZFB)** erzielt. Es lassen sich der Bruchwinkel θ_B , die Bruchgefahr $D(\theta)$, der Reservefaktor und die Mohrschen Bruchspannungen abrufen.

NASTRAN/PATRAN:

Für eine Implementierung in MSC NASTRAN/PATRAN sind zwei Wege denkbar. Entweder kann das Kriterium direkt in den FE-Code NASTRAN eingefügt oder als "Prozessor-Routine" in PATRAN verwendet werden. Für den schnellen Einsatz während der Arbeit am vorliegenden Pro-

jekt wurde der 2. Weg gewählt. Ein FORTRAN Programm liest die NASTRAN Ergebnisse in Form von Komponentenspannungen ein, und das entsprechende Kriterium wird darauf angewendet. Diese Resultate werden wiederum von PATRAN übernommen und als Anstrengung bzw. Reservefaktor dargestellt.

MOSAIC/COMPOSIC:

In diesem Programmsystem besteht die Möglichkeit, die auf das ES-Koordinatensystem bezogenen räumlichen Spannungszustände mittels verschiedener Festigkeitskriterien zu beurteilen. Für orthotrope Volumenelemente bietet das Programm die Wahl zwischen dem Hill-3D-Kriterium und dem Tsai/Wu-3D-Kriterium und einem "user criterion". Das "user-criterion" bietet die Möglichkeit, eine in FORTRAN77 programmierte Subroutine mit dem FEM-System zu verknüpfen. Bei ihrem Aufruf werden von einem Array VPREE der vollständige Spannungszustand eines jeden Knotens und die Basisfestigkeiten des im Pre-Processing definierten Materials übergeben. Nach Bearbeitung des Programmcodes wird von der "user-subroutine" die berechnete Anstrengung oder auch wahlweise der berechnete Bruchwinkel an MOSAIC/COMPOSIC zurückgegeben. Im Post-Processing kann das Ergebnis als Isobarbendarstellung visualisiert werden.

NASREL/NASCOM:

Das einfache parabolische Modell und das inhomogene erweiterte Ausgangsmodell wurden in das Programm NASREL zur Zuverlässigkeitsanalyse von FKV-Bauteilen implementiert. NASREL basiert auf dem FE-Programm NASCOM, das ein 2D-Laminatenelement enthält, und berechnet die Zuverlässigkeit an beliebig vielen Punkten des Bauteiles mit Hilfe linearer Antwortflächen und der FORM/SORM Methodik (siehe Kapitel 5). Es wurde für das Bauteilbeispiel am Ende von Kapitel 5 verwendet.

Es zeigt sich:

- Für die 2D-Spannungsanalyse von FKV-Bauteilen, die aus mehreren ES aufgebaut sind, eignen sich viele herkömmliche Programme in hervorragender Weise. Die Integration eines neuen Festigkeitskriteriums, insbesondere des hier vorgeschlagenen einfachen parabolischen Modells, ist mit relativ geringem Aufwand möglich, da das Kriterium homogen ist und zudem für den 2D-Spannungszustand eine geschlossene Lösung (ohne numerische Iteration) hat.
- Im Prinzip kann die Anwendung des 3D-Kriteriums bereits erfolgen, weil mit Hilfe von in vielen FEM-Programmen verfügbaren anisotropen Volumenelementen ein 3D-Spannungszustand in einem SV berechnet werden kann. Derartige Elemente erfordern aber eine schichtenweise Modellierung und führen daher zu FEM-Modellen mit extrem großer Elementanzahl und den daraus resultierenden Nachteilen hinsichtlich Handhabbarkeit und Rechenzeit. Ein ingenieurmäßiges Vorgehen fordert, daß auch bei dickwandigen Bauteilen in Richtung der Bauteildicke nur eine sinnvolle Anzahl von Elementen vorhanden ist, so daß der heute für die 2D-Schalelementberechnung übliche Aufwand nicht um Größenordnungen überschritten wird.

- Um eine 3D-Analyse mit vertretbarem Modellierungs- und Berechnungsaufwand durchführen zu können, ist die Entwicklung eines neuen Laminat-Volumenelementes notwendig, welches von einem kommerziellen FEM-Softwareentwickler realisiert werden muß.

13.6 Vergleich von Reservefaktoren verschiedener ZFB/ FB-Kriterien

Auf einige CFK- und GFK-Bauteile unter 2D- sowie 3D-Beanspruchung werden zwei herkömmliche und die neuen Festigkeitskriterien angewendet. Bei diesen vergleichenden Nachweisbeispielen (s.a. *Bild 13/6*) wird zwischen den möglichen Vorgabewerten p , θ_B^d und m variiert, um ihren Einfluß auf die abhängigen Größen und die Erfüllung der Anforderungen zu demonstrieren.

a) GAM-Drucktank der ARIANE 5: (Hochdrucktank für Triebwerkschwenkung)

- Eingangsgrößen "CFK mit EP-Matrix"

Belastung: Innendruck 460 bar (Entwurfsberstdruck DUL) $\hat{=} 46$ MPa

Festigkeitspar.: ("B"-Werte) $R_{||}^z = 2300$; $R_{||}^d = 1000$; $R_{\perp}^z = 25$; $R_{\perp}^d = 130$; $R_{\perp||} = 45$ MPa;
 $F_{12} = 0$ (Interaktionsglied bei Tsai/Wu)

- Einf. parab. Modell (13.1 bis 13.7):

* $p \approx 0,17 \rightarrow R_{\perp||}^M \approx 48,8$; $\theta_B^d \approx 52,2^\circ$; $m_{\perp||} = -0,306$; $m_{\perp\perp} = -0,332$; A VIII, IX erfüllt.

(Zur Illustration der Eingabemöglichkeiten noch zusätzliche Fälle:

$m_{\perp||} = m_{\perp\perp} \rightarrow R_{\perp||}^M = R_{\perp||}$; $\theta_B^d = 54,0^\circ$; $p = 0,247$; $m_{\perp||} = -0,444$; A VIII, IX erfüllt,

$\theta_B^d = 53^\circ \rightarrow R_{\perp||}^M = 47,1$; $p = 0,20$; $m_{\perp||} = -0,36$; $m_{\perp\perp} = -0,38$; A VIII, IX erfüllt,

$m_{\perp||} = -0,444 \rightarrow p = 0,247$; $R_{\perp||}^M = 45,0$; $\theta_B^d = 54,0^\circ$; $m_{\perp\perp} = -0,444$ A VIII, IX erfüllt.)

Erweitertes Ausgangsmodell (13.14 bis 13.19):

* $m_{\perp||} = m_{\perp\perp} = -0,3 \rightarrow R_{\perp||}^M = 48,4$; $\theta_B^d = 53,4^\circ$; A VIII, IX erfüllt.

($m_{\perp||} = m_{\perp\perp} = -0,444 \rightarrow R_{\perp||}^M = 42,3$; $\theta_B^d = 57,0^\circ$; A VIII erfüllt, A IX nicht erfüllt,

$\theta_B^d = 53^\circ$, $m_{\perp||} = m_{\perp\perp} \rightarrow R_{\perp||}^M = 49$; $m_{\perp||} = -0,29$; A VIII, IX erfüllt.)

- Krit. Spannungszustand: Kontaktstelle zwischen Liner und FKV-Hülle, Zylinderbereich
 $\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T = (2050, 20, -33, 0, 0, 16)^T$ MPa

- **ZFB-Reservefaktoren f_{Res} im Vergleich**

Tsai-Wu, Gl. (1.6): 1,05 (MS = 0,05) Nachweis erbracht

ZTL, Gl. (1.15): 1,09 (MS = 0,09) Nachweis erbracht

Gl. (13.1)*; $\sigma_n > 0$: 1,13 > 1 (MS = 0,13) Nachweis erbracht

Gl. (13.14)*; $\sigma_n > 0$: 1,13 > 1 (MS = 0,13) Nachweis erbracht

- **FB-Reservefaktoren** (in Ergänzung)

Tsai-Wu, Gl. (1.6): 1,05; ZTL, Gl. (1.14): 1,12; Puck, Gl. (1.4): 1,12

b) Nachrechnung eines hydrostatischen Versuchs in einer Hochdruckkammer

- Eingangsgrößen "GFK-Ring mit oberflächendichter EP-Matrix (+88°-Parallelwicklung)"

Belastung: Hydrostatischer Druck 6000 bar $\hat{=} 600$ MPa

Festigkeitspar.: ("B"-Werte) $R_{||}^z = 1300$; $R_{||}^d = 800$; $R_{\perp}^z = 40$; $R_{\perp}^d = 144$; $R_{\perp||} = 61$ MPa;
 $F_{12} = 0$

- Einfaches parab. Modell (13.1 bis 13.7):

* $p = 0,25 \rightarrow R_{\perp||}^M = 53,9$; $\theta_B^d = 52,3^\circ$; $m_{\perp||} = -0,381$; $m_{\perp\perp} = -0,337$; nur A VIII erfüllt.
 ($m_{\perp||} = m_{\perp\perp} \rightarrow R_{\perp||}^M = R_{\perp||}$; $\theta_B^d = 49,4^\circ$; $p = 0,118$; $m_{\perp||} = -0,18$; A VIII, IX erfüllt,
 $\theta_B^d = 50^\circ \rightarrow R_{\perp||}^M = 59,5$; $p = 0,14$; $m_{\perp||} = -0,214$; $m_{\perp\perp} = -0,209$; A VIII, IX erfüllt.)

Erweitertes Ausgangsmodell (13.14 bis 13.19):

* $m_{\perp||} = -0,38$; $m_{\perp\perp} = -0,31 \rightarrow R_{\perp||}^M = 53,1$; $\theta_B^d = 53,6^\circ$; A VIII erfüllt, A IX nicht.
 ($m_{\perp||} = m_{\perp\perp} = -0,18 \rightarrow R_{\perp||}^M = 60,2$; $\theta_B^d = 50^\circ$; A VIII, IX erfüllt,
 $\theta_B^d = 50^\circ$, $m_{\perp||} = m_{\perp\perp} \rightarrow R_{\perp||}^M = 60,2$; $m_{\perp||} = -0,18$; A VIII, IX erfüllt.)

- Kritischer Spannungszustand: Innenmantel

$\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T = (-578, -597, -600, 0, 0, -0,7)^T$ MPa

- **ZFB-Reservefaktoren f_{Res} im Vergleich** (experimentell kein Versagen)

Tsai-Wu, Gl. (1.6):	$0,21 < 1$	(MS = -0,79)	Nachweis nicht erbracht
ZTL, Gl. (1.16):	$0,24 < 1$	(MS = -0,76)	Nachweis nicht erbracht
Gl. (13.2)* ; $\sigma_n < 0$:	> 100	(MS $\gg 0$)	Nachweis erbracht
Gl. (13.15)* ; $\sigma_n < 0$:	> 100	(MS $\gg 0$)	Nachweis erbracht

- **FB-Reservefaktoren** (in Ergänzung)

Tsai-Wu, Gl. (1.6): 0,21!; ZTL, Gl. (1.14) = 1,38; Puck, Gl. (1.4): 1,38

c) Vergleichsrechnungen für $\sigma_2^z = 0,75 \tau_{31}$ (Pucksche Ecke) und $\sigma_2^d/\tau_{21} < -1$ (Buckelbereich)

- Festigkeitsparameter eines GFK-Rohrs mit EP-Matrix ($\alpha = 90^\circ$): siehe Beispiel b)

• Einfaches parab. Modell (13.1 bis 13.7):	$p = 0,25$;	} <u>A VIII</u> erfüllt, <u>A IX</u> nicht erfüllt
Erw. Ausgangsmodell (13.14 bis 13.19):	$m_{\perp } = -0,38$; $m_{\perp\perp} = -0,31$	

• Krit. Spannungsz.: $\{\sigma\} = (0, 30, 0, 0, 40, 0)^T$ aus Belastung: $n_{ax} + m_{bieg}$ (Pucksche Ecke)	• $\{\sigma\} = (0, -70, 0, 0, 0, 50)^T$ aus Belastung: $F_{ax} + M_t$ (Buckel)
--	--

- **ZFB-Reservefaktoren f_{Res}**

Tsai-Wu, Gl. (1.6): 0,92 Nachweis n. erbr.
 ZTL, Gl. (1.15): 1,33 Nachweis erbr.
 Gl. (13.1); $\sigma_n > 0$: 1,33 Nachweis erbr.
 Gl. (13.14); $\sigma_n > 0$: 1,33 ($\theta_B = 0^\circ$) Nachw. erbr.

- **ZFB-Reservefaktoren f_{Res}**

Tsai-Wu, Gl. (1.6): 1,39, Nachw. erbr.
 ZTL, Gl. (1.16): 1,22, Nachweis erbr.
 Gl. (13.2); $\sigma_n < 0$: 1,46, Nachw. erbr.
 Gl. (13.15); $\sigma_n < 0$: 1,44 ($\theta_B \approx \pm 42^\circ$) N.erbr.

Folgerungen aus den Beispielen a), b) und c):

- Herkömmlich werden zu hohe Anstrengungen ($1/f_{Res}$) ermittelt, die in ausgewählten Versuchen nicht belegt wurden.
- Konventionelle Festigkeitsnachweise liefern keine Aussagen über Versagensmodus und Bruchwinkel

- Insbesondere bei hohen 3D-Spannungszuständen im Druckbereich (etwa wie bei Krafteinleitungen) ergeben herkömmliche Festigkeitsbedingungen Reservefaktoren, die im Widerspruch zum experimentellen Befund stehen.
- Bei herkömmlichen Beschreibungen von (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurven wird rechnerisch festgestellt, daß eine Erniedrigung der Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^z$ die Werte von Bruchspannungskombinationen im Bereich (σ_2^d, τ_{21}) erhöht, was natürlich nicht sein kann.

13.7 Empfehlungen zu stochastischem Modell und zu Teilsicherheitsfaktoren

Die durchgeführten Zuverlässigkeitsanalysen lassen noch keine abschließenden Empfehlungen zu. Hierzu müßte das zugehörige Systemproblem, also die Berücksichtigung der Versagensereignisse an mehreren Punkten im Bauteil und in verschiedenen ES, einer mit vertretbarem Aufwand durchführbaren Lösung zugeführt werden. Vor allem aber müßte der Größeneffekt in seiner Höhe belegt sein. Die folgenden Schlußfolgerungen gelten daher nur für einen Punkt in einem SV-Bauteil. Die Versagensereignisse an den einzelnen Punkten der verschiedenen ES sind jedoch hoch abhängig, wenn die Festigkeitsstreuungen mit den Beanspruchungsstreuungen vergleichbar sind. Diese Abhängigkeit bedeutet, daß auch ohne Systembetrachtung die lokale Untersuchung (Hot-spot Analyse) wesentliche Einsichten vermitteln kann, da die Systemversagenswahrscheinlichkeit nur wenig größer als die lokal maximale Versagenswahrscheinlichkeit am Hot-spot ist.

Bezüglich des stochastischen Modells für die streuenden Konstruktionsparameter kann ausgesagt werden, daß die ausgewählten Modelle, d.h. die Weibullverteilung für alle Basis-Festigkeitswerte, die Normalverteilung für geometrische Parameter und die Normalverteilung für Belastungen bzw. bei zeitveränderlichen Lasten, die Gumbelverteilung jeweils geeignet sind. Das liegt an den noch relativ kleinen Streuungen in den Tabellen von Abschnitt 5.4.2, bei denen sich Unterschiede im verwendeten stochastischen Modell noch nicht so stark auswirken. Vergleichsrechnungen mit anderen noch anwendbaren Modellen zeigen die gleichen Tendenzen auf.

Zwischen den einzelnen Basis-Festigkeitswerten sollten Korrelationen berücksichtigt werden, da sie z.T. von den gleichen Werkstoffparametern wie Faserdichte und Matrixfestigkeit abhängen. Wegen der geringen Stichprobengröße konnten jedoch nur grobe Schätzungen zur Korrelation durchgeführt werden. Genauere Schätzungen erfordern zudem noch andere Versuche, und es sollten alle Festigkeitswerte möglichst mit einem Probekörpertyp ermittelt werden. Auch die angreifenden Spannungen sind, abhängig vom jeweiligen Anwendungsfall, mehr oder weniger hoch korreliert.

Bei realen Bauteilen hängt die Versagenswahrscheinlichkeit sehr stark vom Untersuchungsort und der betrachteten Schicht ab. Das rechtfertigt ebenfalls eine lokale Betrachtung. Das gleiche gilt offensichtlich auch für die α -Werte als Einflußgrößen der Zufallsvariablen (streuenden Konstruktionsparameter) und daraus abgeleiteten Größen, wie den Teilsicherheitsfaktoren.

Für ein Zuverlässigkeitsniveau von ungefähr $\beta \approx 3$ (entspricht $P_f \approx 10^{-3}$) ergeben sich für die Lastspannungen ($V = 15\%$) auf den jeweiligen Mittelwert bezogene Teilsicherheitsfaktoren von 1,1 bis 1,3. Die Teilsicherheitsfaktoren für die Festigkeiten ($V = 7$ bis 15%) variieren stärker, d.h. von 1,1

bis 1,5 und in extremen Fällen sogar bis über 1,7. Sie werden am größten, wenn sie die Bruchkurve dominieren, d.h. bei vorwiegender Druckbeanspruchung ist $\gamma(R_{\perp}^d) \approx 1,4$ und sonst $\gamma(R_{\perp}^d) \approx 1,1$. Desgleichen ist bei vorwiegender Schubbeanspruchung $\gamma(R_{\perp\parallel}) \approx 1,45$ und sonst $\gamma(R_{\perp\parallel}) \approx 1,25$ bzw. bei vorwiegender Zugbeanspruchung $\gamma(R_{\perp}^z) \approx 1,7$ und sonst $\gamma(R_{\perp}^z) \approx 1,4$. Diese Zahlenwerte hängen vom angestrebten Zuverlässigkeitsniveau ab. Eine Erhöhung des Zuverlässigkeitsindex β auf 3,5 ($P_f \approx 2 \cdot 10^{-4}$) bedeutet eine Vergrößerung der anzusetzenden Teilsicherheitsfaktoren γ um 0,1. Ähnliche Änderungen ergeben sich aber auch, wenn die Streuungen der Beanspruchungen und der Festigkeitswerte von den hier gemachten Annahmen wesentlich nach oben abweichen. Die oben angegebenen Teilsicherheitsfaktoren sind auf die Mittelwerte bezogen. Bei Bezug auf charakteristische Werte bzw. Toleranzgrenzwerte für die R-Werte verkleinern sich die Teilsicherheitsfaktoren entsprechend.

ANHANG I: SONSTIGE VERSUCHE

I.1 DER GESCHICHTETE GEKRÜMMTE BIEGETRÄGER (σ_2^z, σ_3^z) [BS], [RD]

Zielsetzung: - Untersuchung der Querkzugbruchspannungen in der Kombination $\sigma_2^z \approx \sigma_3^z$ -

I.1.1 Verifizierungsweg

Der Spannungszustand eines gekrümmten Balkens besteht aus Biegespannungen (Normalspannungen σ_N), die in Balkenlängsrichtung wirken, den entsprechenden Schubspannungen und zusätzlich aus Radialspannungen (σ_R), die über die Balkenhöhe verteilt sind.

Der Grundgedanke bei den Versuchen mit diesem Probekörper besteht nun darin, den Spannungszustand des gekrümmten Balkens mit seiner Radialspannungskomponente $\sigma_R = \sigma_3$ zu nutzen, um eine definierte zweiachsige Querkzug-Beanspruchung zu erzeugen. Diese soll in einer "Meßschicht" wirken, deren Faserrichtung um 90° versetzt zu den Fasern der Tragrichtung eines geschichteten, gekrümmten Trägers angeordnet ist (siehe hierzu Bild I.1/1).

Infolge der Beanspruchung entstehen in der "inneren" und "äußeren" Tragschicht des Balkens im wesentlichen σ_1 -Spannungen, die in der Meßschicht des betrachteten Schnittes A - A zu σ_2 -Querspannungen werden (Bild I.1/1). Die Radialspannungen des geschichteten Trägers sind in der Meßschicht identisch mit σ_3 . Schnitt A - A liegt auf der Scheitellinie des gekrümmten Trägers. Die Spannungen in den Tragschichten sind für die Untersuchung nicht von Bedeutung.

Die in den beiden nachfolgenden Kapiteln beschriebenen Versuche haben nicht den Erwartungen entsprechend zur Verifizierung beigetragen. Allerdings beinhalten diese Arbeitsbelege äußerst wertvolle Informationen zur verwendeten Versuchstechnik und Herstellung von Probekörpern als auch zur Arbeit mit dem Bruchkriterium.

I.1.2 Erste Entwicklungsstufe: Probekörperfestlegung, Meßschichtanordnung, Analyse

I.1.2.1 Anordnung der Meßschicht

Bei der Untersuchung des gekrümmten Biegeträgers als möglichem Probekörper galt es zuerst zu klären, wo jeweils die Meßschicht anzuordnen sei, damit interessante Bruchspannungskombinationen (z.B. in der (σ_2, σ_3) -Ebene) auftreten können. Die entsprechenden FE-Berechnungen führten auf eine Festlegung der Meßschicht im Bereich von $R = 23,5$ mm bis $R = 24,0$ mm. Die in Bild I.1/6 dargestellten Spannungsverteilungen zeigen die Situation im Scheitelsbereich eines 180° -Bogens. Die Steifigkeitssprünge zwischen der Meßschicht sowie innerer und äußerer Tragschicht bewirken für den Verlauf der Normalspannung σ_N eine Annäherung an die Radialspannung σ_R im Bereich der Meßschicht. Im Scheitel des Bogens wirken nur die beiden Querkzugspannungen σ_2 und σ_3 (σ_N entspricht hier σ_2), die etwa von gleicher Größe sind. Aufgrund der geometrischen Verhältnisse muß nach der Balkentheorie die Schubspannung im Scheitelschnitt zu Null werden. Im Versuch, wie auch rechnerisch im FE-Modell, werden unter dieser Spannungsconstellation ZFB erzeugt

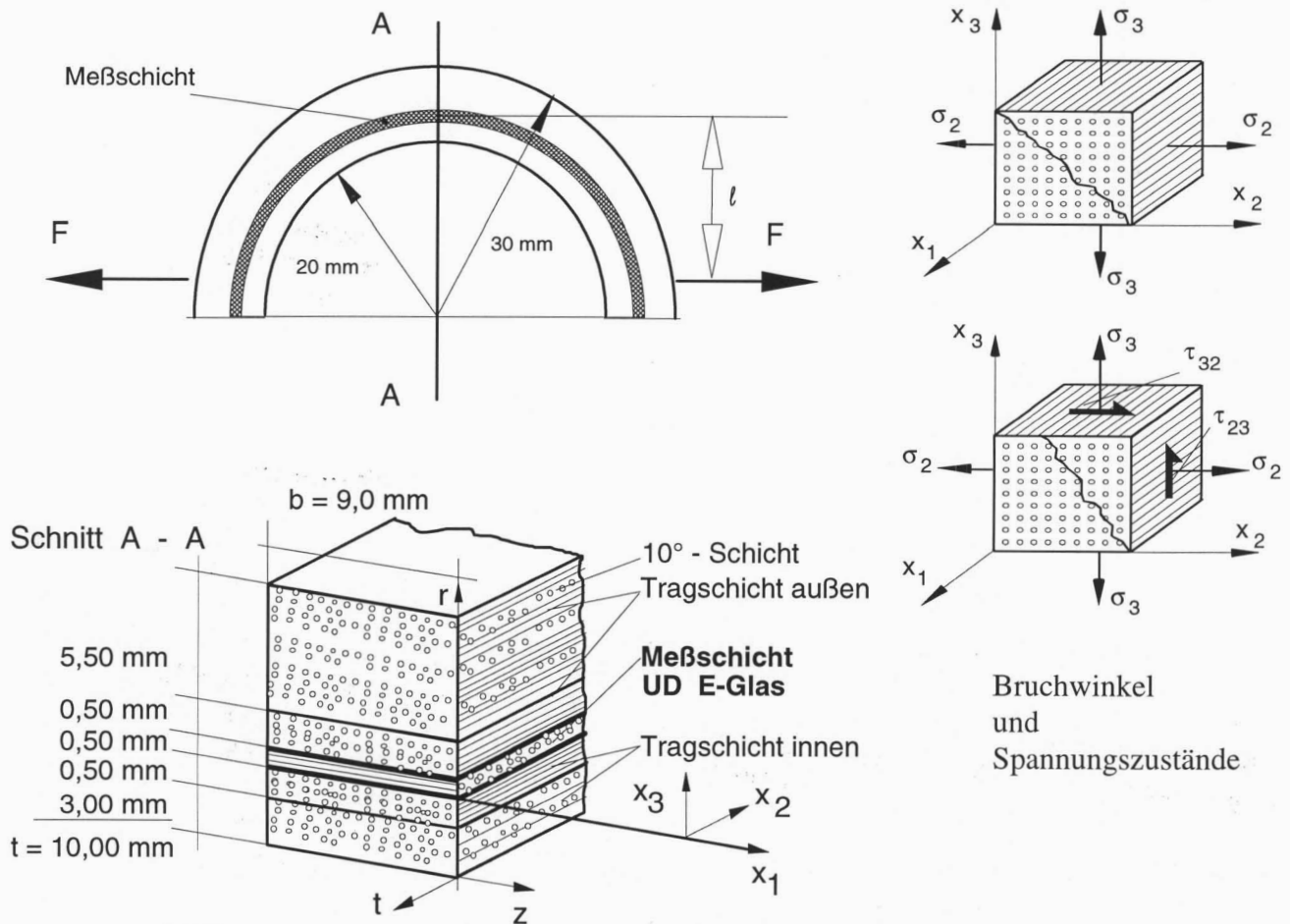


Bild I.1/1: Aufbau des Probekörpers und Lage der "Meßschicht", 1. Entwicklungsstufe

Für die jeweils ermittelte Spannungscombination kann mit Hilfe des Kriteriums (s. a. [BRU96]) die Bruchgefahr abgeschätzt bzw. der Reservefaktor ermittelt werden. Dazu wurden die Werkstoffkennwerte von Tab. 6/2 verwendet.

Tabelle II/1: Verwendete Werkstoffe / Materialien

Komponente	Bezeichnung	Bemerkung
Faser		
Glas	E-Glas	Meßschicht
Kohlenstoff	T 300/3000x40B	Tragschichten
Matrix		Mischungsverhältnis: 100 : 36
Harz	XW 1202	
Härter	HY 936	

I.1.2.2 Herstellung der Probekörper, Geometrie und Wickeltechnik

Um einen derartigen Probekörper gemäß den Qualitätsanforderungen und der erforderlichen Maßgenauigkeit herstellen zu können, wurde die Wickeltechnik gewählt. Die Herstellung des Probekör-

pers für die 1. Entwicklungsstufe sollte im wesentlichen dazu dienen, das Wickelprogramm aufzustellen, und die Vorrichtung zur Aufbringung der Zugbelastung zu testen (*Bild I.1/3*).

Als Krümmung ist $R / t \approx 2$ angestrebt worden. Die Verwendung des existierenden Wickeldorns (*Bild I.1/2*) gibt den Innendurchmesser von 40 mm vor, so daß bei der Wahl von Tragschicht / Meßschicht / Tragschicht = 3.5 / 0.5 / 6.0 mm die Krümmung $R / t \approx 25 / 10.0 = 2.5$ beträgt.

Zur Herstellung der Probekörper aus gewickelten Rovings wird im folgenden die Wickelprozedur festgelegt (*Tabelle I.1/2*). Um die Querkontraktionszahlen für die Tragschichten (T300) und die Meßschicht (E-Glas) einander anzugleichen, werden Wickelwinkel von $\pm 88^\circ$ und $\pm 10^\circ$ mit einem Schichtdickenverhältnis von 2 / 1,3 gewählt. Hierbei wird jedoch das Schichtdickenverhältnis 2 / 1,3 verschmiert über die gesamte Tragschicht angenommen. Die unmittelbar an die Meßschicht angrenzende dünne Tragschicht wird als reine 90° -Lage ausgeführt.

Um die Schwierigkeiten beim Wickeln von 0° Lagen zu vermeiden und die Qualität der Meßschicht zu erhöhen (definierte dichte Faserablage, hoher Fasergehalt), wird ein Wickelwinkel von 3° gewählt bzw. zugelassen.

Bei größeren Schichtdicken muß die Herstellung der Gesamtwandung in einzelne Schritte bzw. Arbeitsabschnitte unterteilt werden, um eine gute Qualität des Lagenaufbaues zu erreichen. Hierbei wird der jeweils gewickelte Abschnitt ausgehärtet bevor der nächste hergestellt wird. Grundsätzlich soll durch das abschnittsweise Vorgehen verhindert werden, daß die Ausrichtung der innen liegenden Rovings von den folgenden Wicklungen beeinträchtigt wird ("Lockenbildung"), was sich bei großen Schichtdicken sonst kaum vermeiden läßt. Deshalb wird allgemein bei Wickelkörpern mit Zwischenhärtung gearbeitet. Im vorliegenden Fall jedoch ist das Problem des Zwischenhärtens (bedeutet das Einfügen einer Grenzschicht) etwas anders zu bewerten, weil hier gezielt Spannungen σ_3 quer (senkrecht) zur Faser eingesetzt werden, um ZFB zu erzeugen. Diese Spannung befindet sich über mehrere mögliche "Arbeitsfugen" (Grenzschichten) hinweg auf konstant hohem Niveau. Da die Grenzschichten jedoch zwangsläufig nicht naß in naß verarbeitet worden sind, haben sie nur die Qualität und die Eigenschaften einer gut vorbereiteten Verklebung (Klebeschicht), die in diesem Fall senkrecht zu ihrer flächigen Ausdehnung auf Zug beansprucht wird, was zu Delaminationen in dieser Schicht führen könnte, bevor der zu untersuchende Bruch innerhalb der Meßschicht eingetreten ist.

Deshalb sollte versucht werden, ein Zwischenhärten nur in den äußeren Bereichen der Tragschichten vorzunehmen, und die eigentliche Meßschicht sowie die Übergangsschichten innen und außen und die hierzu benachbarten Tragschichten in einem Arbeitsgang herzustellen.

Die Länge des Wickelkerns wurde mit 200 mm den technischen Erfordernissen (wie Handhabung, Verminderung des Fadendurchhangs etc.) angepaßt.

Der rohrförmige Probekörper, aus dem die gekrümmten Balken gewonnen werden, wurde nach den in *Tabelle I.1/2* dargestellten Verarbeitungsschritten hergestellt:

Tabelle 1.1/2: Lagenaufbau und Wickelschema des Probekörpers

	Dicke mm	Material	Bemerkung
1	3.00	T300	Innere Tragschicht Die innere Tragschicht wird abwechselnd 90° und $\pm 10^\circ$ gewickelt, so daß eine soweit wie möglich homogene Lage erzeugt wird. Schichtdickenverhältnis 2 (90°) / 1.3 ($\pm 10^\circ$)
2			Zwischenhärtung und Oberflächenbehandlung Bei der Zwischenhärtung wird der bisher gewickelte Verbund weitgehend ausgehärtet und die Oberfläche zum weiteren Aufbau der Tragschicht behandelt (Aufrauen etc.; event. Überdrehen, dann jedoch vorher vollaushärten).
3			Maßhaltigkeit prüfen und protokollieren Vermessung des Wickelwinkels und der Rohrgeometrie.
4	0.50	T300	Innere Tragschicht Die Wickelung der inneren Tragschicht wird fortgesetzt mit 90° Lage
5	0.50	E-Glas	Meßschicht Die Meßschicht wird naß in naß unter + 3° auf die Tragschicht gewickelt (reine UD Lage).
6	0.50	T300	Äußere Tragschicht Die 1. Lage der äußeren Tragschicht wird naß in naß analog zu 4 auf die Meßschicht gewickelt.
7			Zwischenhärtung und Oberflächenbehandlung siehe 2 (kein Überdrehen erforderlich)
8	2.50	T300	Äußere Tragschicht Die 2. Lage der äußeren Tragschicht wird auf die vorbereitete Oberfläche gewickelt (Verfahren siehe 1).
9			Zwischenhärtung und Oberflächenbehandlung siehe 2 (kein Überdrehen erforderlich)
10	3.00	T300	Äußere Tragschicht Die 3. Lage der äußeren Tragschicht wird auf die vorbereitete Oberfläche gewickelt (Verfahren siehe 1).
11			Maßhaltigkeit prüfen und protokollieren Vermessung des Wickelwinkels und der Rohrgeometrie.

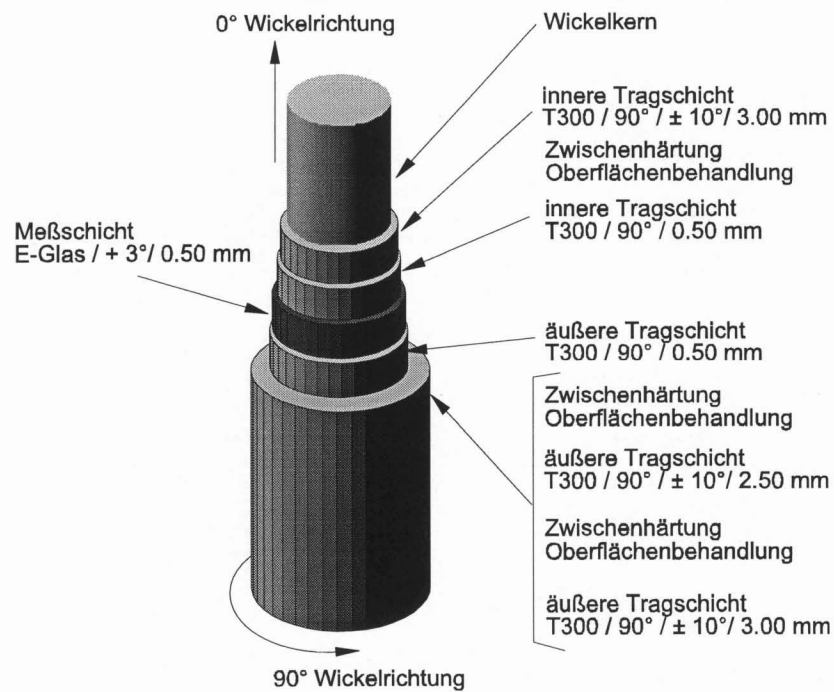


Bild I.1/2: Schematischer Lagenaufbau

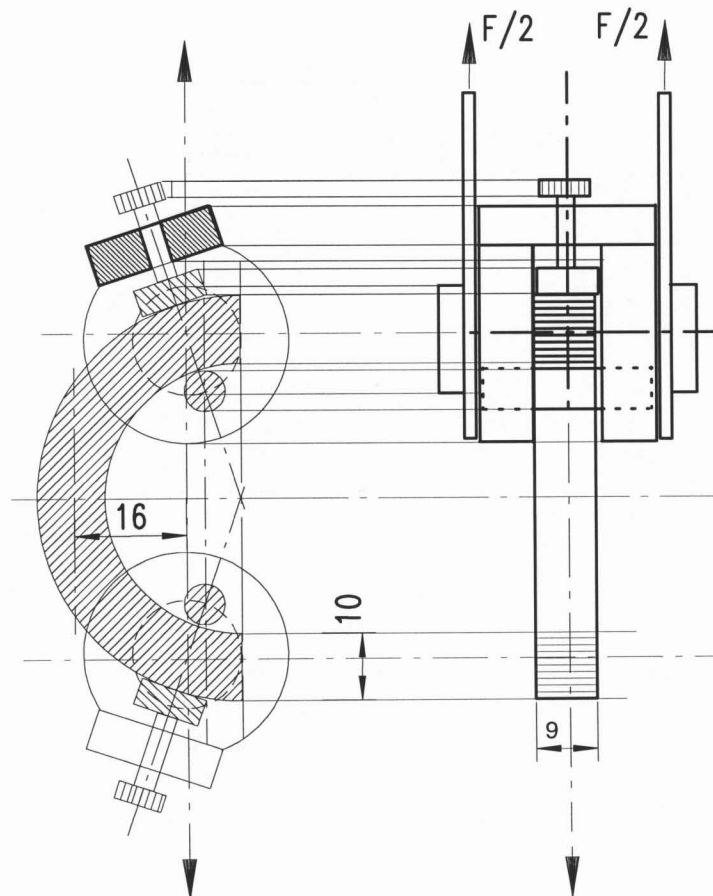


Bild I.1/3: Vorrichtung zur Aufbringung der Zugbeanspruchung

I.1.2.3 Numerische Untersuchungen

FE - Modell:

Zur Berechnung wurde von einem Bogensegment von 120° eine 60° Symmetriehälfte und weiterhin nur die halbe Querschnittsbreite von 4,5 mm (Vollquerschnitt 9,0 mm) idealisiert. Der entsprechende Ausschnitt aus dem Probekörper ist in *Bild I.1/4* dargestellt. Die Radien sind 20 / 23,5 / 24 / 30 mm. Die Schichtdicken ergeben sich daraus zu 3,5 / 0,5 / 6,0 mm.

Das FE-Modell besteht aus :

3588 Knoten, 2530 Hexa-Elementen, 276

Rbar-Elementen, 143 MPC's.

Als Material ist GFK mit den in *Tabelle 6/2* angegebenen orthotropen Materialkennwerten verwendet worden.

Die Wickelwinkel sind $90/0/90$ Grad für Innen- Mittel- und Außenzylinder.

Der Krafteinleitungspunkt liegt in der Mittelebene $z = 4.5$ bei $r = 20$ und $\theta = 30$.

Das Berechnungsmodell wurde mit einer Zugkraft von 500 N belastet; der Hebelarm relativ zur Meßebeine beträgt 15 mm. Die

Belastung für den kompletten Probekörper mit 9,0 mm Balkenbreite ergibt sich damit zu $F = 1$ kN.

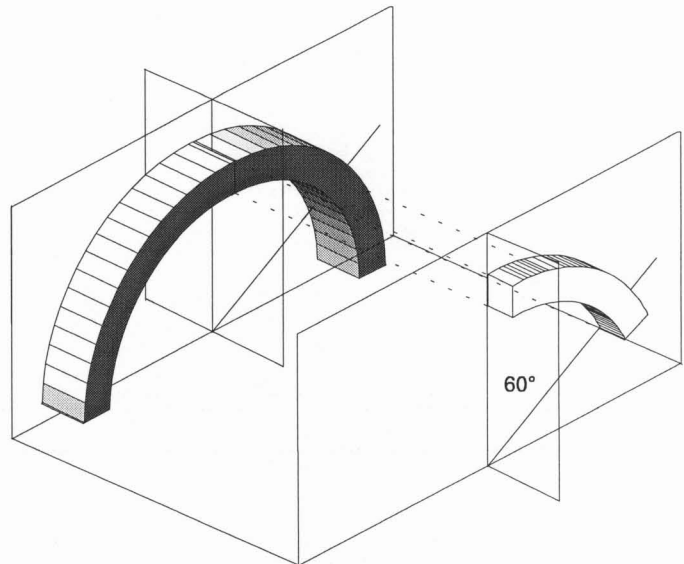


Bild I.1/4: Ausschnitt für FE-Modell

Ergebnisse:

Die aus der FE-Berechnung resultierenden Radial- und Normalspannungen (σ_R und σ_N) sind für den Scheitelschnitt in den *Bildern I.1/6* und *I.1/7* ausgewertet worden.

Die vorliegenden Spannungswerte repräsentieren nicht den Bruchzustand; es sollen hiermit lediglich die Zusammenhänge zwischen Radial- und Normalspannungen im Bereich der Meßschicht aufgrund der Trägerkrümmung aufgezeigt werden. Über die Meßschicht ergibt sich ein nahezu identischer Verlauf der beiden im Scheitelschnitt vorhandenen Spannungen σ_N und σ_R . Durch die Lage der Meßschicht und die Art der Belastung lassen sich verschiedene Kombinationen von Zug- bzw. Druckspannungen für σ_N und σ_R einstellen. Für den hier interessierenden Fall (s. Testmatrix Pkt. 11) ist für die Meßschicht die Biegenormalspannung $\sigma_N = \sigma_2$ und die Radialspannung $\sigma_R = \sigma_3$ (und zwar beide positiv), um die "Ecke" in der (σ_2, σ_3) -Darstellung (s. *Bild II/5*) bestimmen zu können, wo der Bruch durch die beiden gleichgroßen Quer/Zugspannungen erzeugt werden.

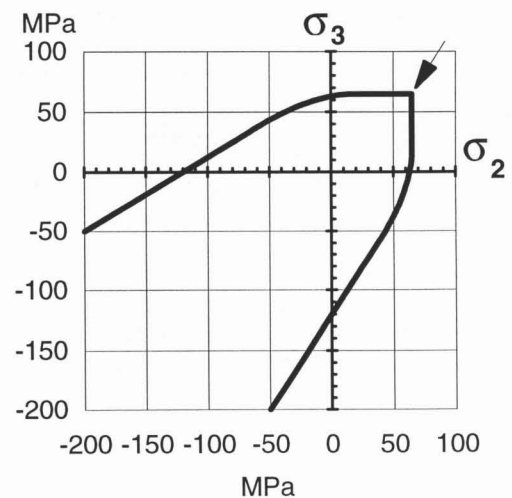


Bild I.1/5: Bruchkurve in der (σ_2, σ_3) -Ebene

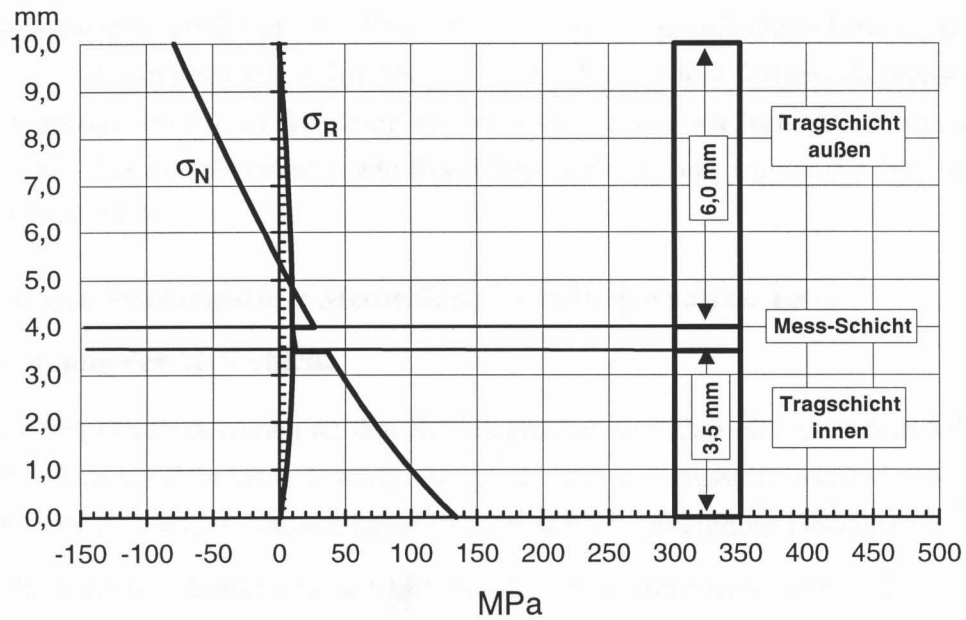


Bild I.1/6a: Verteilung von Normalspannung σ_N und Radialspannung σ_R im Scheitel des gekrümmten Trägers infolge einer Kraft $F = 1$ kN. Hebelarm $l = 15,0$ mm

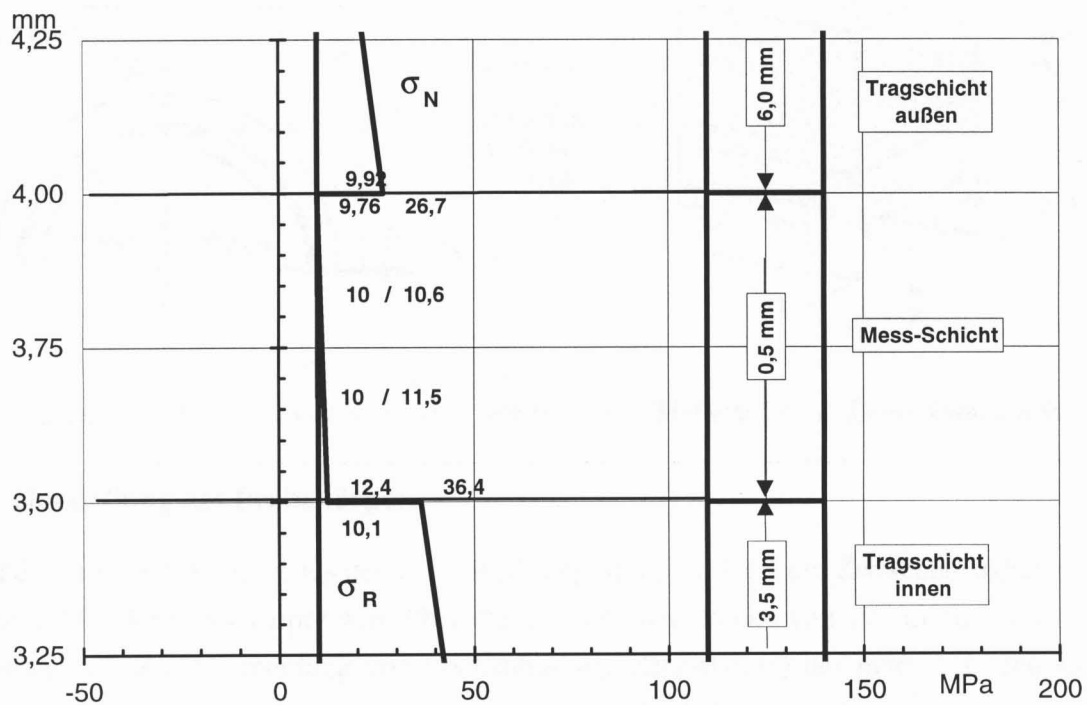


Bild I.1/6b: Detail von Bild I.1/6

Die Ergebnisse der 3-D-FE-Berechnung deuten an, daß die von der Balkentheorie abgeleiteten Überlegungen grundsätzlich für diese Bruchuntersuchung verwendbar sind, und die Lage der Meßschicht entsprechend zutreffend gewählt worden ist.

Die angegebenen Schichtdicken sollen so exakt wie möglich eingehalten werden, so daß eine möglichst gute Übereinstimmung mit dem Berechnungsmodell gegeben ist.

Aushärte-Eigenspannungen können nicht vermieden werden, allerdings wird ihr Einfluß dadurch gemildert, daß der gewickelte Ring in zwei Hälften zerlegt wird.

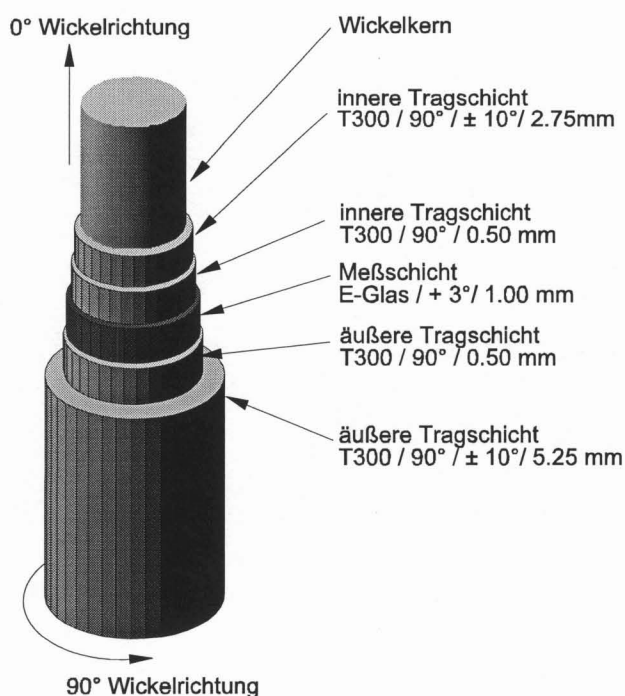


Bild I.1/8: Schematischer Lagenaufbau des Probekörpers

Tabelle I.1/3: Werkstoffe für die 2. Entwicklungsstufe

Komponente	Bezeichnung	Hersteller	Bemerkung
Glasfaser	E-Glas	Vetrotex	R099-1200-P103 (Schlichte) Lieferung v. 01.06.95
Kohlenstoff-faser	T 300 / 3k	Torayca	Los-/Chargen-Nr.: F 115021 mit Schlichte, Verwendbar bis Feb. 1997 Eingangskontr. DOK.Nr. 50046371
Harz (100 %)	LY 556	Ciba-Geigy	kalthärtend (RT, auch 40°-60°C)
Härter (15 %)	HY 951	Ciba-Geigy	kalthärtend

Tabelle I.1/4: Lagenaufbau und Wickelschema des Probekörpers

	Dicke mm	Material	Bemerkung
1	2.75	T300	Innere Tragschicht Die innere Tragschicht wird abwechselnd 90° und $\pm 10^\circ$ gewickelt, so daß eine soweit wie möglich homogene Schicht erzeugt wird. Schicht-dickenverhältnis 2 (90°) / 1,3 ($\pm 10^\circ$)
2	0.50	T300	Innere Tragschicht Die Wickelung der inneren Tragschicht wird mit 90° -Lage fortgesetzt
3	1.00	E-Glas	Meßschicht Die Meßschicht wird unter $+ 3^\circ$ auf die Tragschicht gewickelt (reine UD Lage).
4	0.50	T300	Äußere Tragschicht Die 1. Lage der äußeren Tragschicht wird auf die Meßschicht gewickelt (90° Lage).
5	5.25	T300	Äußere Tragschicht 2. Lage der äußeren Tragschicht (Verfahren siehe 1).

FE - Modell:

Für die zweite Entwicklungsstufe wurde das FE-Modell geringfügig modifiziert. Es wurde ein Viertelbogen mit der vollen Balkenbreite idealisiert (s. in Bild I.1/9). Der Lagenaufbau konnte von seiner Struktur her übernommen werden; die Schichtdicken ergeben sich nach Bild I.1/7 zu 3,25 / 1,0 / 5,75 mm.

Das Berechnungsmodell wurde mit einer Zugkraft von 1820 N belastet, was Bruchlast für diesen Probekörper bedeutet; der Hebelarm relativ zur Meßebeine beträgt 14 mm.

Die aus dieser Berechnung resultierende maximale Anstrengung von 0,595 (s. Farbtafel I.1/1) dokumentiert die Abweichung von

den in der Rechnung angenommenen Materialkennwerten und den realen Eigenschaften des Probekörpers; bei deren Übereinstimmung müßte die maximale Anstrengung für den Fall des Bruchs exakt 1,0 betragen. Wie das Schliffbild, Bild I.1/12, zeigt, sind in der schwierig herzustellenden 3° -Wicklung relativ viele Poren vorhanden.

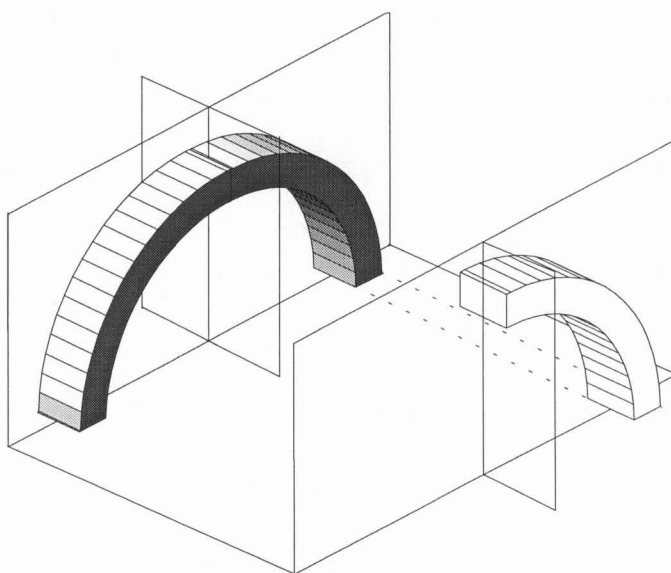


Bild I.1/9: Ausschnitt für FE-Modell

Zug-Tests:

Die von den Probekörpern der 1. Entwicklungsstufe bekannten Delaminationen, die vorwiegend an den von der Meßschicht entfernt liegenden Aushärtungs-Grenzschichten aufgetreten waren, sind nun nicht mehr vorhanden. Bei der Auswertung der neuen Zug-Tests waren jedoch wieder großflächige Delaminationen feststellbar, von denen nicht eindeutig gesagt werden konnte, wo sie primär entstanden sind. Die Risse liefen an der inneren oder äußeren Seite der Meßschicht entlang und wechselten zu den Bogenenden hin jeweils die Seite der Meßschicht, indem sie diese durchdrangen. Es war nicht eindeutig erkennbar, ob die Delaminationen die Risse in der Meßschicht hervorgerufen hatten, oder ob die Risse für die nachfolgenden Delaminationen verantwortlich waren. Die Erwartung, daß sich im Zug-Versuch der Initialriß aufgrund der maximalen σ_2 -, σ_3 -Spannungen im Scheitel einstellen würde, hatte sich nicht erfüllt.

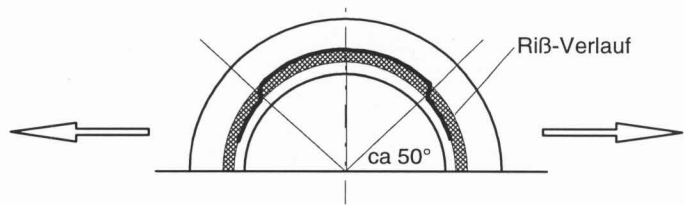


Bild 1.1/10: Riß-Verlauf beim Zug-Test

Druck-Test:

Der Druck-Test wurde im wesentlichen deshalb durchgeführt, um weitere Informationen über den Ursprung des Rißverlaufs zu erlangen.

Die Untersuchung des Probekörpers nach dem Druck-Test ergab, daß der primäre Bruch mit hoher Wahrscheinlichkeit innerhalb der Meßschicht im Bereich der Bogenenden ausgelöst worden war.

Somit war das eigentliche Resultat des

Drucktests die Erkenntnis, daß der Riß tatsächlich in der Meßschicht initiiert worden war und die anschließende Delamination einen Sekundäreffekt darstellte.

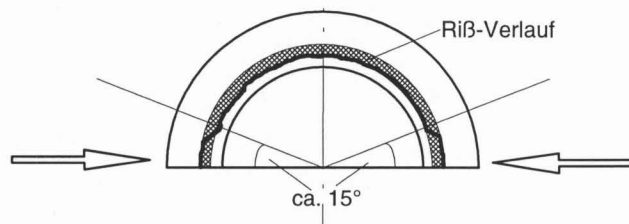


Bild 1.1/11: Riß-Verlauf beim Druck-Test

1.1.3.3 3D-Analyse der herstellungsbedingten Eigenspannungen

Die räumliche Schichtverbundanalyse erfolgte mit den Geometriedaten: Innendurchmesser $D_i = 40$ mm, Wanddicke $t = 10$ mm, Breite $b = 10$ mm und dem Schwindmaß $\epsilon_{s\perp} = 0,5$ % (Werkstoffkennwerte gemäß *Tabelle 6/2*).

Bei der durchgeführten räumlichen Modellanalyse erfolgten entsprechend den einzelnen Zwischenhärtungsstufen vier Berechnungsläufe zur Ermittlung der Schwindspannungen, wobei die bereits ausgehärteten Schichten im mathematischen Modell nur "mechanisch" aktiv sind und so keine Eigendehnungen erfahren. Die thermischen Eigenspannungen infolge Abkühlung werden bei den wiederholten Zwischenhärtungen weitgehend abgebaut, so daß die thermischen Gesamt-Eigenspannungen im Verbund hauptsächlich bei Abschluß der Fertigung (letzte Aushärtung) eingebracht werden. Daher sind die Schwindspannungen einzelner Aushärtetstufen mit den Temperatur-Eigen-

spannungen des gesamten Schichtverbundes zu überlagern, wie in *Tabelle I.1/5* angegeben.

Die so ermittelten Eigenspannungen stellen die Extremwerte der Störspannungen in der GFK-Prüfschicht des geschlossenen Kreisringes dar. Die Spannungen der GFK-Prüfschicht sind im nachfolgenden *Bild I.1/12* schraffiert gekennzeichnet.

Tab. I.1/5: Überlagerung herstellungsbedingter Eigenspannungen

(*) nur in den zusätzlichen Schichten)

Herstellungsschritt	Max. Spannungen in der GFK-Prüfschicht in MPa				Bemerkung
	$\sigma_r \approx \sigma_3$	$\sigma_\varphi \approx \sigma_2$	$\sigma_z \approx \sigma_1$	$\tau_{\varphi z} \approx \tau_{21}$	
1. Zwischenhärtung	—	—	—	—	$\varepsilon_{S\perp} = 0,5 \%$
2. Zwischenhärtung	0,72	59,16	5,61	-1,09	$\varepsilon_{S\perp} = 0,5 \%$ *)
3. Zwischenhärtung	0,06	-0,68	13,43	0,03	$\varepsilon_{S\perp} = 0,5 \%$ *)
4. Zwischenhärtung	-0,15	-0,82	-11,11	0,02	$\varepsilon_{S\perp} = 0,5 \%$ *)
Temperaturbelastung	-4,50	-21,51	-11,60	-0,01	$\Delta T = -50K$
Summe	-3,87	36,15	-30,52	-1,05	

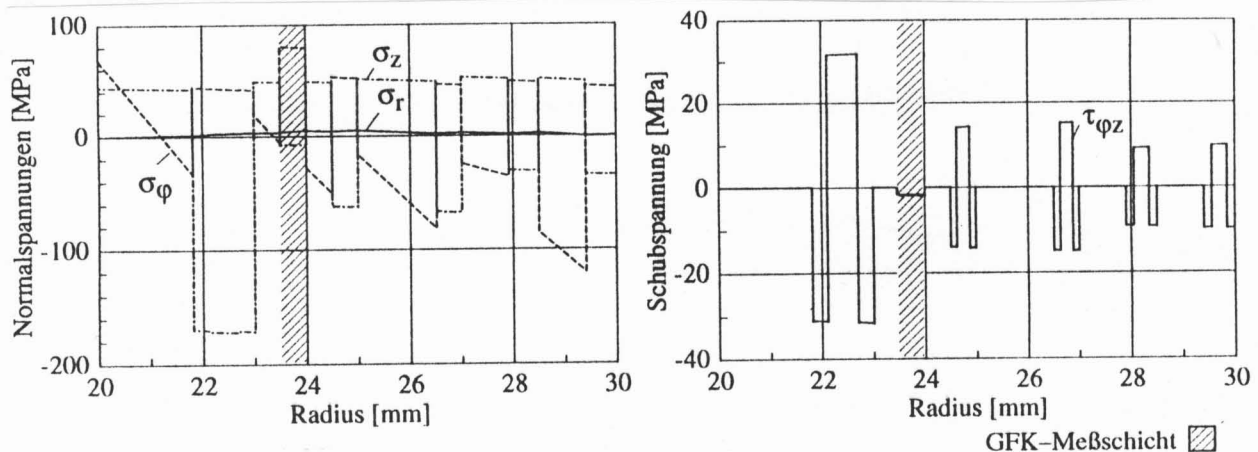


Bild I.1/12: Herstellungsbedingte Eigenspannungen infolge Abkühlung und Matrixschwindung

I.1.4 Anwendung des neuen Bruchkriteriums auf den gekrümmten Biegeträger

Vorausgesetzt, daß die Erkenntnisse aus dem Drucktest bezüglich der Rißausbreitung auch für die Ergebnisse der Zug-Tests angenommen werden könnten, bedeutete der Rißverlauf bei den Zug-Tests, daß bei einem gekrümmten, geschichteten Biegeträger der Bruch nicht im Scheitelschnitt in-

folge maximaler σ_2 -, σ_3 -Spannungen entsteht, sondern in den Bereichen maximaler Schubspannung τ_{23} seinen Ursprung nimmt.

Nachdem das Bruchkriterium in der Fassung von Puck [Puc96] (Gl. (3.14 - 3.16)) als Postprozessor-Modul erstellt und getestet worden war, zeigte auch die damit durchgeführte Analyse für die Zug-Tests ein plausibles Ergebnis. Der Bereich der maximalen Bruchgefahr (kleinste Sicherheit gegen Bruch) befand sich exakt dort, wo die Initialrisse innerhalb der Meßschicht auftraten. In diesem Bereich wurde also der Bruch durch die maximalen Schubspannungen τ_{23} verursacht, während der Bereich der maximalen σ_2 -, σ_3 -Spannungen hinsichtlich der Bruchgefahr ein etwas niedrigeres Niveau aufwies.

Der Algorithmus für das Bruchkriterium in der o.g. Version wurde in FORTRAN programmiert. Hierbei werden im Anschluß an die allgemeine Strukturanalyse in einem 2. Berechnungsschritt die Bauteilspannungen in die Spannungen der faserparallelen Ebenen transformiert. Danach muß, um die Lage der Bruchebene bzw. um den Bruchspannungszustand bestimmen zu können, in einem Bereich von -90° bis $+90^\circ$ der virtuelle Bruchwinkel solange variiert werden (Bruchwinkelsuche), bis der sog. Streckungsfaktor zum Minimum wird bzw. die Bruchgefahr zum Maximum (s. Kapitel 2).

Anhand dieses Beispiels hat sich schon innerhalb des Projektvorhabens nutzbringende Anwendung eben dieses Kriteriums bestätigt.

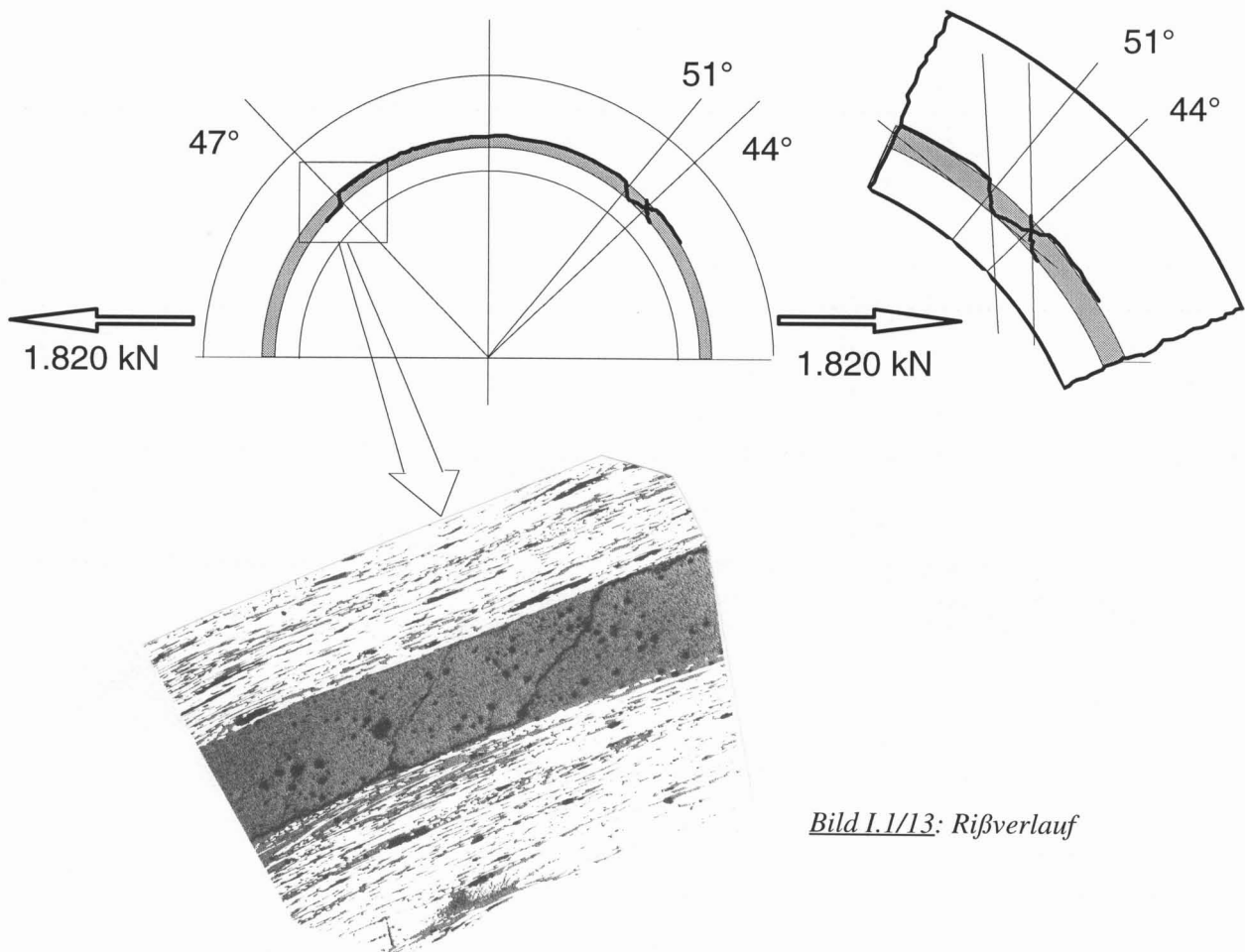


Bild I.1/13: Rißverlauf

Die Schubspannungen τ_{n1} und τ_{nt} sind bezüglich ihres Beitrages zur Berechnung der Bruchgefahr vernachlässigbar, da ihre Maximalwerte ca. 3 MPa nicht überschreiten. Wie aus Farbtafel I.1/1 ersichtlich, ist der Bereich der maximalen Bruchgefahr D nahezu deckungsgleich mit demjenigen von der Spannung $\max \sigma_n$, welche sich im wesentlichen aus den Bauteilspannungen σ_2 , σ_3 und τ_{23} zusammensetzt. Die Schubspannungen τ_{31} und τ_{21} haben keinen nennenswerten Anteil an A. Während die beiden Normalspannungen σ_2 und σ_3 von ihrem Maximalniveau am Scheitel des Bogens zur Angriffsstelle der Kraft hin ständig abnehmen, steigt in dieser Richtung der Wert von τ_{23} kontinuierlich an und bestimmt dann die Neigung der Bruchebene.

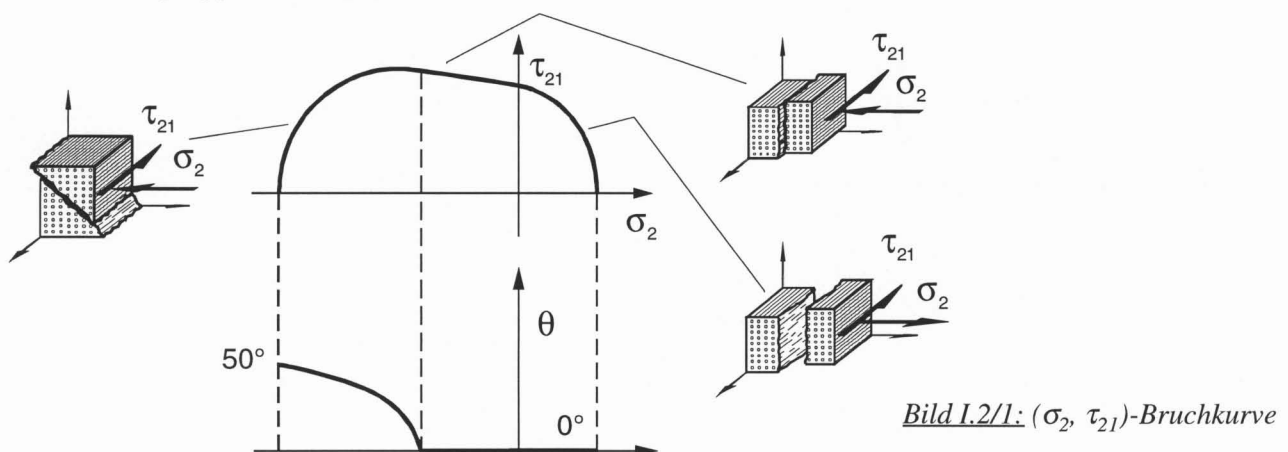
Als Fazit muß leider konstatiert werden, daß eine Bruchuntersuchung auf Basis der maximalen Normalspannungen σ_2^z und σ_3^z im Scheitel des gekrümmten Biegeträgers nicht möglich ist, da die vom Scheitel weg anwachsenden Schubspannungen das Bruchgeschehen dominieren. Die Feststellung eines gültigen biaxialen Querkzugfestigkeitswertes war nicht möglich.

I.2 DAS KERNGESTÜTZTE ROHR ($\sigma_2, \tau_{21}, \theta_B$) [DH, JK]

I.2.1 Verifizierungsweg

Die Zug/Druck-Torsionsprüfung an rohrförmigen Probekörpern wurde schon in vorangegangenen Kapiteln näher beschrieben. Bereits in /Puc82/ wurde die Erfahrung gemacht, daß die Bruchfläche nach dem Eintreten eines ZFB durch die Entladung der elastisch gespeicherten Verformungsenergie erheblich beschädigt wird und deshalb der Bruchwinkel u.U. nicht mehr vermessen werden kann. Um die Beschädigung des Bruchbereichs zu verhindern, wurde ein Stützkern entwickelt, der bis zum Eintreten des ZFB in der Prüfschicht selbst nicht geschädigt wird und der die durch den Bruch der Prüfschicht freiwerdende Energie bei einer nur sehr geringen Deformation aufnehmen kann.

Mittels eines solchen kerngestützten Rohres können einzelne Punkte der (σ_2^d, τ_{21}) -Kurve durch direkte Variation der Prüflasten angefahren werden. In Bild I.2/1 ist die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve (identisch (σ_3, τ_{31})) wiedergegeben.



Für Zugnormalspannungen σ_2^z wird der Bruch im gesamten Bereich gemeinsam durch beide Spannungen erzeugt. Der Bruchwinkel ist stets $\theta_B = 0^\circ$, da beide Spannungen für sich allein zu einem Bruch auf der selben Wirkebene führen; hier sind demnach σ_n und τ_{n1} identisch σ_2 und τ_{21} .

Für Durcknormalspannungen σ_2^d steigt die Bruchkurve aufgrund des "bruchbehindernden" Effekts negativer Normalspannungen an, der Bruchwinkel $\theta_B=0^\circ$ ändert sich bis zu einem Wert von $\sigma_2 \approx 2/3R_{\perp}^d$ jedoch nicht. D.h. der ZFB wird in diesem Bereich ausschließlich durch τ_{n1} unter dem Einfluß von σ_n^d bewirkt. Erst danach kommt es zu einem Anwachsen des Bruchwinkels, der – bei den in Kap. 7 definierten Verhältnissen der Basisfestigkeiten – bis auf etwa 50° ansteigt. In diesem Bereich der Bruchkurve wird der ZFB demnach von den beiden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} unter dem Einfluß von σ_n^d gemeinsam bewirkt.

I.2.2 Auslegung des Probekörpers

Auslegungsziel war es, einen Probekörper zu dimensionieren, der für den gesamten Druckbereich der (σ_2, τ_{21}) -Kurve geeignet ist. Für die Kernkonstruktion wurden verschiedene Varianten diskutiert, von denen zunächst ein reiner Epoxidharzkern aufgrund seiner stofflichen Verwandtheit mit der UD-FKV Prüfschicht als am erfolgversprechendsten ausgewählt wurde. Reines Epoxidharz hat eine höhere Bruchstauchung und Bruchschiebung als das zu prüfende UD-FKV, womit ein Kern aus Epoxidharz bis zum Eintreten von ZFB in der Prüfschicht unbeschadet bleiben sollte [Pou95].

Die zum Erzeugen eines ZFB in der Prüfschicht benötigte Belastungskombination aus Druckkraft und Torsionsmoment kann mit Hilfe des Superpositionsprinzips rechnerisch ermittelt werden, sofern vorausgesetzt werden kann, daß Stauchung und Schiebung von Stützkern und Prüfschicht einander entsprechen (*Bild I.2/2*).

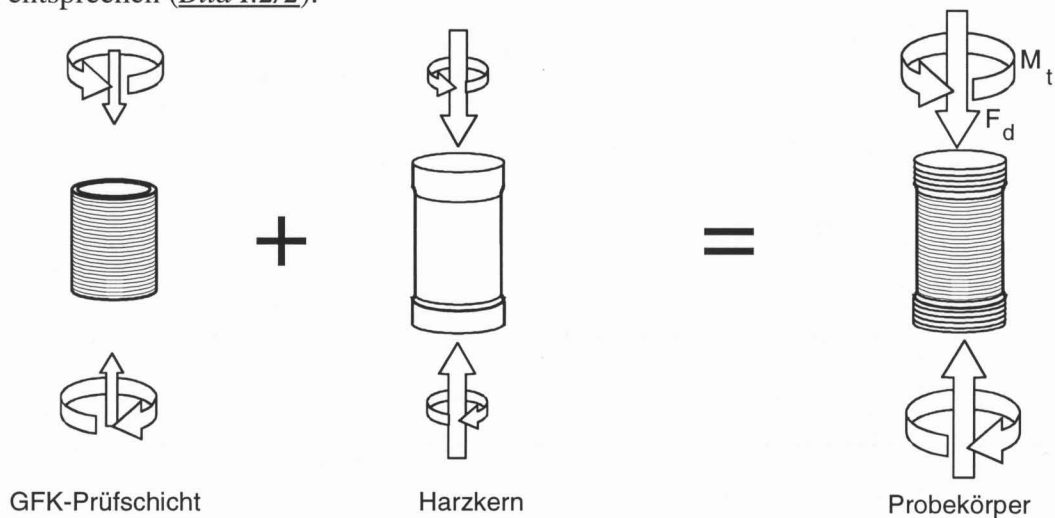


Bild I.2/2: Superposition der Lasten von Prüfschicht und Stützkern

Generell entstehen bei der Kraft- und Torsionsmomenteinleitung in einen Zylinder unterschiedliche Verläufe der Spannungsverteilung. Während die Druckspannung über Länge und Querschnitt des Prüfkörpers konstant ist, variiert die Schubspannung über den Querschnitt der Prüfschicht proportional zum betrachteten Radius. Sie kann in Abhängigkeit vom Radius r und dem aufgetragenen Torsionsmoment $M_{t,p}$ nach der folgenden Formel

$$\tau_{21} = \frac{M_{t,p}}{I_p} r \quad \text{mit} \quad I_p = \pi \frac{d_a^4 - d_i^4}{32} \quad (\text{I.2.1})$$

abgeschätzt werden. *Dub90/*

Nach dem Superpositionsprinzip muß der Kern den gleichen Verdrehwinkel ϕ erfahren wie die Prüfschicht. Das zusätzlich benötigte Torsionsmoment $M_{t,K}$ für den Kern folgt damit zu

$$M_{t,K} = (\phi \cdot G_K \cdot I_p) / \ell. \quad (I.2.2)$$

Der Vollständigkeit halber sollte erwähnt werden, daß folgende Beziehung zur Berechnung der benötigten Drucklast $F_d = F_{d,P} + F_{d,K}$ in der Prüfschicht angesetzt wird mit

$$F_{d,P} = \sigma_2^d \cdot \pi(r_a^2 - r_i^2) \quad (I.2.3)$$

und wegen des Aufbringens der gleichen Stauchung ε auf den Kern die zusätzliche Drucklast $F_{d,K}$

$$F_{d,K} = \varepsilon \cdot E_K \cdot \pi \cdot r_i^2. \quad (I.2.4)$$

Der neue Probekörper wurde basierend auf der Geometrie des Standard Z/D-T-Probekörpers entwickelt [MAN87], um weitgehend auf Veränderungen der vorhandenen Prüfmaschine verzichten zu können (*Bild I.2/3*). Mit den Gln. (I.2.1) bis (I.2.4) läßt sich abschätzen, daß für die gewählte Probekörpergeometrie rechnerisch jede brucherzeugende (σ_2, τ_{21}) -Spannungskombination erzielt werden kann, ohne die Leistungsfähigkeit der Prüfmaschine von $F_{\max}=150$ kN und $M_{t,\max}=3400$ Nm voll auszulasten.

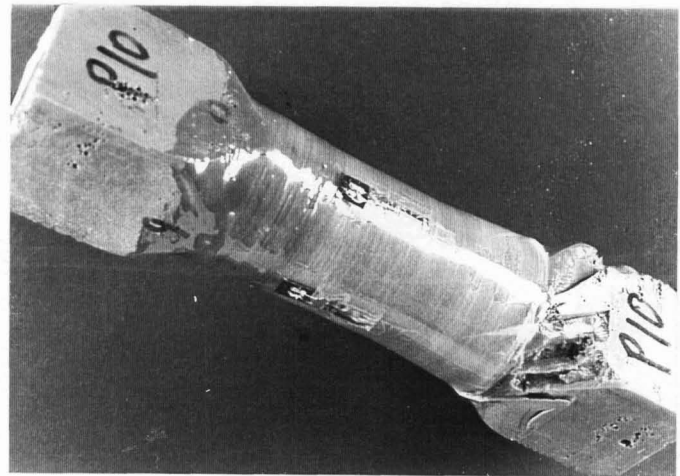
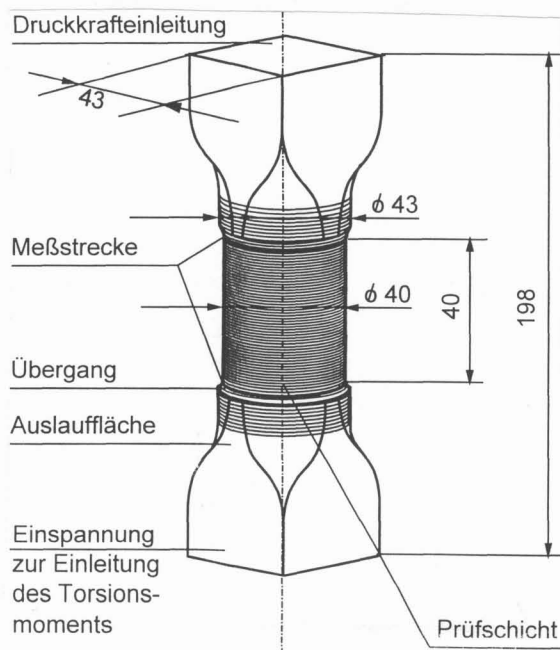


Bild I.2/3: Probekörper für den Druck-Torsionsversuch

I.2.3 Diskussion der Ergebnisse mit einigen Schlußfolgerungen

Bei dem gewählten Fertigungsverfahren für den Stützkern wurde das Harzsystem mit 5% Aluminiumpulver versetzt, um die Abfuhr der exothermen Reaktionswärme zu verbessern. Vermutlich aufgrund eines relativ hohen Gehalts an Luftporen und des angenäherten Berechnungsverfahrens wurde die geforderte Festigkeit nicht erreicht; der Stützkern hielt der notwendigen maximalen Torsionsbeanspruchung nicht stand und brach am Ende der auslaufenden Prüfschicht. Legt man die in

[Schü89] ermittelte Schubfestigkeit des Reinharzes von $\tau_{\max}=55$ MPa zugrunde, so hätte allerdings schon ein Durchmesser von 35,5 mm ausreichen müssen, um das maximal erforderliche Torsionsmoment ohne Bruch des Stützkerns in die Prüfzone einzuleiten. Es konnte daher nur ein Laststrahl mit relativ hoher Druck- und geringer Torsionsbelastung erfolgreich untersucht werden. Aufgrund der aufwendigen Fertigung konnten nur 14 Probekörper hergestellt werden, von denen letztendlich nur zwei zu verwertbaren Ergebnissen führten [Pou95].

Der in Bild I.2/4 links ermittelte Bruchwinkel von $\theta_B=70^\circ$ ist nicht nur deutlich größer als der für diesen Laststrahl vorhergesagte von $\theta_B=43^\circ$ für ein Verhältnis $\sigma_2^d : \tau_{21}$ von 2:1, sondern selbst als der Maximalwert von ca. 54° für $\sigma_2^d = -R_{\perp}^d$. Dieses Ergebnis kann nur durch das Auftreten von erheblichen Eigenspannungen begründet werden.

Eine rechnerische Analyse der Eigenspannungen dieses Probekörpers ergibt, daß aufgrund einer *angenommenen* Reaktionsschwindung der mit kalthärtender Matrix aufgetragenen Prüfschicht von 0,5 % etwa $\sigma_2^z = 40$ MPa auftreten. Dieses Berechnungsergebnis muß, da linearelastisch, d.h. mit konstanten Moduln gerechnet wurde, qualitativ bewertet werden. Ein $\sigma_2^z = 40$ MPa würde die Festigkeit $R_{\perp}^z$ erreichen, und damit könnte rechnerisch bereits bei der Herstellung ZFB auftreten. Die berechneten Schwindspannungen erklären den auftretenden Bruchwinkel nicht. Werden sie in der Berechnung des Bruchwinkels berücksichtigt, so werden geringfügig *kleinere* Bruchwinkel als $\theta_B=43^\circ$ vorhergesagt.

Die Kardangelenke der Z/D-T-Prüfmaschine wurden für die Versuche mit hohen Druckanteilen

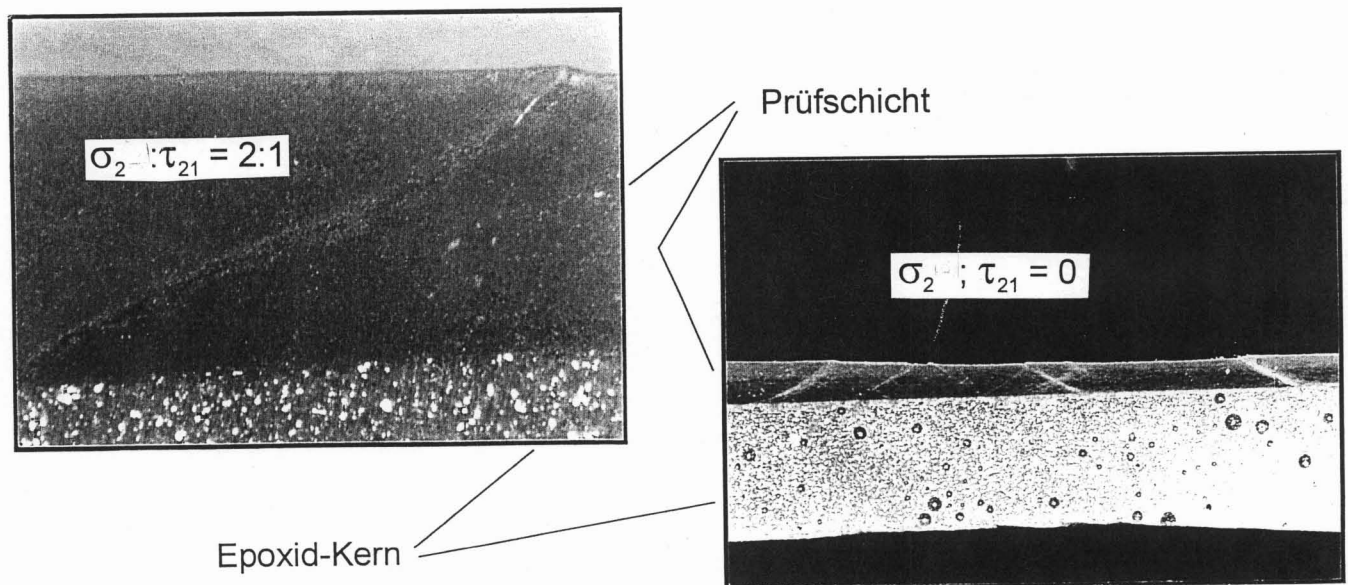


Bild I.2/4: Bruchbilder am kerngestützten Rohr

zwar durch Stützbleche am Ausknicken gehindert, es ist jedoch nicht auszuschließen, daß ein "Ausweicheffekt" des Probekörpers zu einem 3D-Spannungszustand führt. Entsprechende Anteile von σ_3 hätten eine Vergrößerung des Bruchwinkels zur Folge. Bei der Deutung des Bruchwinkels

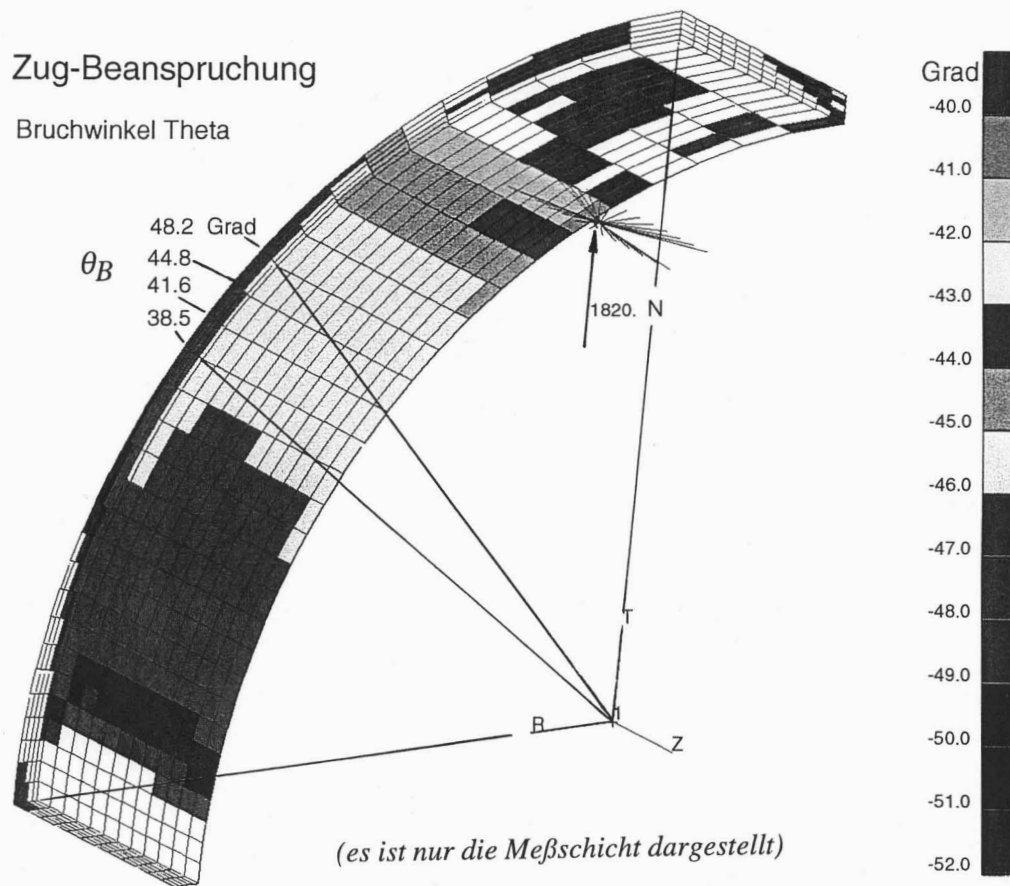
sollte allerdings nicht vergessen werden, daß die Aussagekraft eines einzelnen ausgewerteten Winkels für die Überprüfung einer Spannungskombination nur äußerst gering ist.

Die prinzipielle Tauglichkeit des Versuchsaufbaus zur Ermittlung des Bruchwinkels zeigte ein reiner Quer-Druckversuch auf, bei dem mehrere Bruchwinkel zwischen 57° und 60° ausgewertet werden konnten (*Bild I.2/4, rechts*).

In einer nachfolgenden Arbeit wurde der Versuch unternommen, den nur bedingt tauglichen Epoxidharz-Kern durch einen unter $\pm 15^\circ/\pm 75^\circ$ gewickelten Stützkern zu ersetzen [Wol96]. Die Auslegung dieses zuletzt untersuchten Probekörpers erfolgte mittels eines für diesen Zweck erstellten EXCEL-Programms zur Laminatauslegung, das auch die nichtlinearen Verläufe der Quermomente berücksichtigen konnte. Auf diese Probekörper soll hier nicht näher eingegangen werden, da die zur Verfügung stehende Schnellspannvorrichtung nach [Puc82] nicht das benötigte Torsionsmoment auf den Probekörper übertragen konnte, und damit noch weiterentwickelt werden mußte.

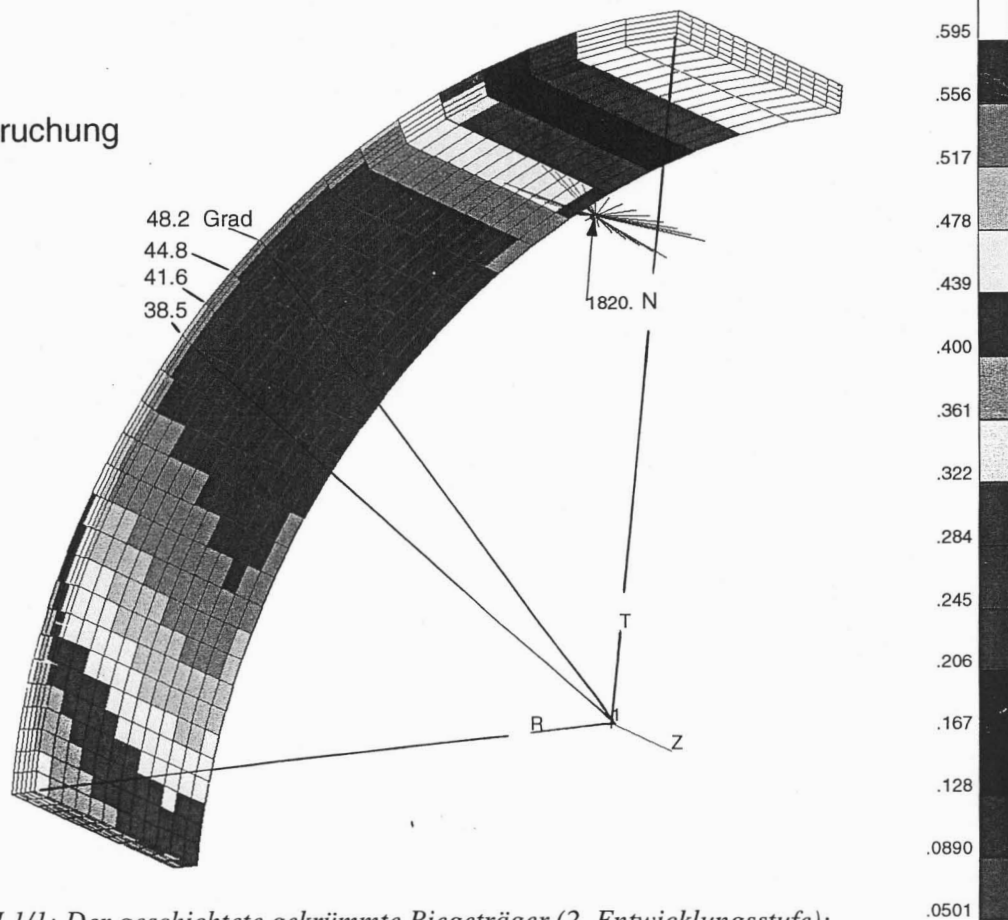
Zug-Beanspruchung

Bruchwinkel Theta



Zug-Beanspruchung

Anstrengung A



Farbtafel I.1/1: Der geschichtete gekrümmte Biegeträger (2. Entwicklungsstufe):

Anstrengungs- und Bruchwinkelverlauf in der Meßschicht unter Zugbelastung

Tabelle 4/3: Ergebnisse der Versuchsreihe A1, Z/D-T Rohrprobekörper, GFK, $N = 140$ ⁽¹⁾ Versuche

Modell	Residuum	$R_{\perp}^z$ [MPa]	$R_{\perp }$ [MPa]	$R_{\perp}^d$ [MPa]	$-m_{\perp }^d$	$-m_{\perp }^z$	$-m_{\perp }^d$	$-m_{\perp }^z$	$R_{\perp }^M$	θ_B [Grad]
#1 (4 Param.)	0.73 (0.073) ⁽²⁾	44.0 (min) ⁽³⁾	68.9 (max)	150.4	0.152	0.152	0.145	0.145 (min)	65.7	48.6°
#2 (5 Param.)	0.72 (0.073)	44.9 (max) ⁽³⁾	67.1 (min)	151.1 (max)	0.183 (max)	0.374	0.175	0.358	64.3	49.3°
#3 (6 Param.)	0.71 (0.073)	44.5	70.1	146.6 (min)	0.091 (min)	0.394 (max)	0.087 (min)	0.379	67.4 (max) $\alpha = 2.31$	47.3° (min)
#4 (5 Param.)	0.66 (0.070)	44.3	68.0	150.4	0.140	0.140 (min)	0.416 ⁽⁴⁾ (max)	0.416 ⁽⁴⁾ (max)	50.2 ⁽⁴⁾ (min)	56.3° ⁽⁴⁾ (max)
#5 (5 Param.)	0.68 (0.071)	44.4	68.4	151.0	0.148	0.148	0.385 ⁽⁵⁾	0.385 ⁽⁵⁾	54.5 ⁽⁵⁾	53.1 ⁽⁵⁾
#6=#4 (4 Param.)	0.69 (0.071)	44.5	67.5	150.8	0.163	0.163	0.163	0.163	64.1	49.6°
#7=#5 (4 Param.)	0.70 (0.072)	44.5	68.0	150.9	0.163	0.163	0.163	0.163	64.9	49.1°

(1) Verwertbare Daten von 153 Versuchen, 13 reine Zugversuche mit leicht unterschiedlichen Probekörpern nicht übernommen: $N=140$

(2) (...) ist das mittlere Residuum: $[\text{Residuum}/(N-q)]^{1/2}$ mit q der Anzahl an Parametern

(3) (min) und (max) heben den minimalen und maximalen Schätzwert der Parameter in den Spalten hervor

(4) Der Parameter $\mu_{\perp||}$ bzw. $m_{\perp||}$ (Zug=Druck) kann beim Modell #4 nur mit Daten aus (σ_2, τ_{23}) -Versuchen richtig geschätzt werden; A VIII wird verletzt. Als Näherung setzt man in diesem Fall $m_{\perp||} = m_{||}$, was Modell #6 entspricht (A VIII nicht verletzt).

(5) Auch beim Modell #5 kann der Parameter $p_{\perp||}$ bzw. $m_{\perp||}$ (Zug=Druck) nur aus (σ_2, τ_{23}) -Versuchen richtig geschätzt werden; A VIII wird verletzt. Setzt man $m_{\perp||} = m_{||}$ (Modell #7), so ergeben sich ca. die gleichen Schätzwerte wie bei den anderen Modellen (A VIII nicht verletzt).

Tabelle 4/4: Ergebnisse der Versuchsreihe A2, Z/D-T Rohrprobekörper, GFK, $N = 61$ Versuche

Modell	Residuum	$R_{\perp}^z$ [MPa]	$R_{\perp\parallel}$ [MPa]	$R_{\perp}^d$ [MPa]	$-m_{\perp}^d$	$-m_{\perp}^z$	$-m_{\perp}^d$	$-m_{\perp}^z$	$R_{\perp\perp}^M$	θ_B^d [Grad]
#1 (4 Param.)	0.38 (0.082) (1)	53.9	69.5 (min)	162.7	0.322 (max)	0.322	0.292	0.292	63.0	51.5°
#2 (5 Param.)	0.38 (0.083)	54.0	70.0	163.3	0.316	0.389	0.287	0.353	63.5	51.4°
#3 (6 Param.)	0.38 (0.083)	53.7 (min) (2)	70.8	165.0 (max)	0.303	0.395 (max)	0.277	0.361	64.6 (max) $\alpha = 1.93$	51.3°
#4 (5 Param.)	0.44 (0.089)	53.9	72.0	151.3 (min)	0.259 (min)	0.259 (min)	0.330 (3)	0.330 (3)	54.7 (3) (min)	54.1° (3) (max)
#5 (5 Param.)	0.40 (0.084)	56.3 (max) (2)	70.8	161.4	0.272	0.272	0.409 (4) (max)	0.409 (4) (max)	57.3 (4)	53.4° (4)
#6=#4 (4 Param.)	0.45 (0.089)	54.1	71.9	151.4	0.277	0.277	0.277 (3)	0.277 (3)	57.5 (3)	52.8° (3)
#7=#5 (4 Param.)	0.47 (0.091)	54.1	72.7 (max)	151.5	0.272	0.272	0.272 (4) (min)	0.272 (4) (min)	59.6 (4)	51.2° (4) (min)

(1) mittlere Residuum: $[\text{Residuum}/(N-q)]^{1/2}$ mit q der Anzahl an Parametern

(2) (min) und (max) heben den minimalen und maximalen Schätzwert der Parameter in den Spalten hervor

(3) Der Parameter $\mu_{\perp\perp}$ bzw. $m_{\perp\perp}$ ($z_{\text{Zug}}=\text{Druck}$) kann bei den Modellen #4 und #6 nur mit Daten aus (σ_2, τ_{23}) -Versuchen richtig geschätzt werden.

Bei beiden Modellen wird A VIII verletzt.

(4) Auch bei den Modellen #5 und #7 kann der Parameter $p_{\perp\perp}$ bzw. $m_{\perp\perp}$ ($z_{\text{Zug}}=\text{Druck}$) nur aus (σ_2, τ_{23}) -Versuchen richtig geschätzt werden. Bei beiden Modellen wird A VIII verletzt.

Tabelle 4/5: Ergebnisse der Versuchsreihe B, Rohrprobekörper, GFK, N = 79 Versuche

Modell	Residuum	$R_{\perp}^z$ [MPa]	$R_{\perp }$ [MPa]	$R_{\perp}^d$ [MPa]	$-m_{\perp }^d$	$-m_{\perp }^z$	$-m_{\perp\perp}^d$	$-m_{\perp\perp}^z$	$R_{\perp\perp}^M$	θ_B^d [Grad]
#1 (4 Param.)	0.61 (0.090) ⁽¹⁾	54.8 ⁽²⁾	76.7 ⁽²⁾	143.2 ⁽²⁾	0	0	0	0	71.6 ⁽²⁾	45.0° ⁽²⁾
#2 (5 Param.)	0.61 (0.090)	54.8	76.7	143.2	0	0	0	0	71.6	45.0°
#3 (6 Param.)	0.61 (0.091)	54.9	77.5	143.1	0.031	0.071	0.028	0.063	69.6 $\alpha = 1.70$	45.8°
#4 (5 Param.)	0.59 (0.089)	54.9	76.6	142.6	0	0	0.250 ⁽³⁾	0.250 ⁽³⁾	55.7 ⁽³⁾	52.0° ⁽³⁾
#5 (5 Param.)	0.60 (0.090)	54.8	76.7	142.8	0	0	0.253 ⁽⁴⁾	0.253 ⁽⁴⁾	57.0 ⁽⁴⁾	50.8° ⁽⁴⁾
#6≡#4 (4 Param.)	0.61 (0.090)	54.9	76.6	143.0	0	0	0	0	71.5	45.0°
#7≡#5 (4 Param.)	0.61 (0.090)	54.8	76.7	143.2	0	0	0	0	71.6	45.0°

(1) (...) ist das mittlere Residuum: $[\text{Residuum}/(N-q)]^{1/2}$ mit q der Anzahl an Parametern

(2) Bei diesen Daten werden die Parameter für alle Modelle nahezu gleich geschätzt. Auffällig ist, daß alle Steigungen fast 0 sind.

(3) Der Parameter $\mu_{\perp\perp}$ bzw. $m_{\perp\perp}$ (Zug=Druck) kann beim Modell #4 nur mit Daten aus (σ_2, τ_{23}) -Versuchen richtig geschätzt werden; A VIII wird verletzt. Als Näherung setzt man in diesem Fall $m_{\perp\perp} = m_{\perp||}$, was Modell #6 entspricht (A VIII nicht verletzt).

(4) Auch beim Modell #5 kann der Parameter $p_{\perp\perp}$ bzw. $m_{\perp\perp}$ (Zug=Druck) nur aus (σ_2, τ_{23}) -Versuchen richtig geschätzt werden; A VIII wird verletzt. Setzt man $m_{\perp\perp} = m_{\perp||}$ (Modell #7), so ergeben sich ca. die gleichen Schätzwerte wie bei den anderen Modellen (A VIII nicht verletzt).

Tabelle 4/6: Ergebnisse der Versuchsreihe C, Rohrprobekörper, GFK, $N = (5 \times) 14$ Versuche ⁽¹⁾

Modell	Residuum	$R_{\perp z}$ [MPa]	$R_{\perp }$ [MPa]	$R_{\perp}^d$ [MPa]	$-m_{\perp }^d$	$-m_{\perp }^z$	$-m_{\perp \perp}^d$	$-m_{\perp \perp}^z$	$R_{\perp \perp}^M$	θ_B [Grad]
#1 (4 Param.)	0.078 (0.088) ⁽¹⁾	39.4	59.0	145.1	0.213	0.213	0.216	0.216	59.7	50.1°
#2 (5 Param.)	0.067 (0.086)	39.8	61.2	145.4	0.158	0.453	0.162	0.463	62.6	49.0°
#3 (6 Param.)	0.066 (0.091)	40.0	60.3	140.0	0.168	0.379	0.167	0.378	60.0 $\alpha = 2.28$	49.1°
#4 (5 Param.)	0.072 (0.090)	39.5	59.5	140.3	0.189	0.189	0.465 ⁽²⁾	0.465 ⁽²⁾	44.8 ⁽²⁾	57.5° ⁽²⁾
#5 (5 Param.)	0.077 ⁽³⁾ (0.092)	39.6	59.6	140.5	0.207	0.207	0.422 ⁽³⁾	0.422 ⁽³⁾	49.4 ⁽³⁾	53.6° ⁽³⁾
#6≡#4 (4 Param.)	0.082 (0.091)	39.5	59.5	140.3	0.202	0.202	0.202	0.202	57.4	50.7°
#7≡#5 (4 Param.)	0.080 (0.089)	39.4	59.8	145.0	0.196	0.196	0.196	0.196	60.6	49.7°

(1) (...) ist das mittlere Residuum: $[\text{Residuum}/(N-q)]^{1/2}$ mit q der Anzahl an Parametern. Die Versuchsdaten sind hier jeweils die Mittelwerte aus 5 Einzelversuchen, deren Daten aber nicht mehr zugänglich waren. Das mittlere Residuum wird also mit $N=14$ gerechnet.

(2) Der Parameter $\mu_{\perp \perp}$ bzw. $m_{\perp \perp}$ (Zug=Druck) kann beim Modell #4 nur mit Daten aus (σ_2, τ_{23}) -Versuchen richtig geschätzt werden; A VIII wird verletzt. Als Näherung setzt man in diesem Fall $m_{\perp \perp} = m_{\perp ||}$, was Modell #6 entspricht (A VIII nicht verletzt).

(3) Auch beim Modell #5 kann der Parameter $p_{\perp \perp}$ bzw. $m_{\perp \perp}$ (Zug=Druck) nur aus (σ_2, τ_{23}) -Versuchen richtig geschätzt werden; A VIII wird verletzt. Setzt man $m_{\perp \perp} = m_{\perp ||}$ (Modell #7), so ergeben sich ca. die gleichen Schätzwerte wie bei den anderen Modellen (A VIII nicht verletzt).

Tabelle 4/7: Ergebnisse der Versuchsreihe A3, Z/D-T Rohrprobekörper, CFK, $N = 72$ Versuche

Modell	Residuum	$R_{\perp z}$ [MPa]	$R_{\perp \parallel}$ [MPa]	$R_{\perp d}$ [MPa]	$-m_{\perp \parallel}^d$	$-m_{\perp \parallel}^z$	$-m_{\perp \perp}^d$	$-m_{\perp \perp}^z$	$R_{\perp \perp}^M$	θ_B [Grad]
#1 (4 Param.)	0.67 (0.099) ⁽¹⁾	59.1	98.4 (min)	231.2	0.284 (max)	0.284	0.264	0.264	91.5	51.0°
#2 (5 Param.)	0.67 (0.100)	59.7	98.5	231.2	0.281	0.412 (max)	0.262	0.384	91.6	51.0°
#3 (6 Param.)	0.67 (0.100)	59.8 (max) ⁽²⁾	98.5	231.0	0.256	0.411	0.242 (min)	0.389	93.0 (max) $\alpha = 2.12$	50.6° (min)
#4 (5 Param.)	0.66 (0.100)	59.4	99.1	231.2	0.226 (min)	0.226 (min)	0.485 (max)	0.485 (max)	72.4 ⁽³⁾ (min)	57.9° ⁽³⁾ (max)
#5 (5 Param.)	0.68 ⁽⁴⁾ (0.101)	59.6	99.9 (max)	231.3	0.244	0.244	0.422 ⁽⁴⁾	0.422 ⁽⁴⁾	81.3 ⁽⁴⁾	53.6° ⁽⁴⁾
#6≡#4 (4 Param.)	0.67 (0.099)	59.5	99.2	231.2	0.238	0.238	0.238	0.238	91.3	51.7°
#7≡#5 (4 Param.)	0.68 (0.100)	58.7 (min) ⁽²⁾	99.9	231.3	0.250	0.250	0.250	0.250 (min)	92.6	50.7°

(1) (...) ist das mittlere Residuum: $[\text{Residuum}/(N-q)]^{1/2}$ mit q der Anzahl an Parametern

(2) (min) und (max) heben den minimalen und maximalen Schätzwert der Parameter in den Spalten hervor

(3) Der Parameter $\mu_{\perp \perp}$ bzw. $m_{\perp \perp}$ (Zug=Druck) kann beim Modell #4 nur mit Daten aus (σ_2, τ_{23}) -Versuchen richtig geschätzt werden; A VIII wird verletzt. Als Näherung setzt man in diesem Fall $m_{\perp \perp} = m_{\perp \parallel}$, was Modell #6 entspricht (A VIII nicht verletzt).

(4) Auch beim Modell #5 kann der Parameter $p_{\perp \perp}$ bzw. $m_{\perp \perp}$ (Zug=Druck) nur aus (σ_2, τ_{23}) -Versuchen richtig geschätzt werden; A VIII wird verletzt. Setzt man $m_{\perp \perp} = m_{\perp \parallel}$ (Modell #7), so ergeben sich ca. die gleichen Schätzwerte wie bei den anderen Modellen (A VIII nicht verletzt).

ANHANG IV: GLOSSAR

"A"-Wert - (Unterer) Toleranzgrenzwert für die Wahrscheinlichkeiten $p = 99\%$; $C = 95\%$ eines einseitigen Toleranzintervalles beim Merkmal Festigkeit. Laut MIL-HDBK5 werden bei Normalverteilung für A- wie für B-Werte mindestens 10 Stichproben zu 10 Beobachtungswerten verlangt. Ein A-Wert sagt aus, daß er von 99 % aller beobachteten Werte erreicht oder übertroffen wird, bei einem gewählten Vertrauensgrad von 95 %

Adhäsivbruch - Bruch an Faser/Harz-Grenzflächen bzw. am Faser/Haftmittel/Harz-Grenzflächen, vgl. auch Interface, Interphase

Allgemeine anerkannte Regeln der Technik - Anforderungen, die sich zusammensetzen aus den Prinzipien und Lösungen, die sich bei der Mehrheit der Wissenschaftler und vor allem der auf dem Gebiet arbeitenden Praktiker durchgesetzt haben. Es reicht nicht, wenn eine technische Regel nur im Fachschrifttum vertreten wird und wenn die Wissenschaft sie in der Theorie billigt. Vielmehr muß das Prinzip in der Praxis erprobt sein und sich bewährt haben

Alterung - Gesamtheit aller im Laufe der Zeit in einem Material irreversibel ablaufenden chemischen und physikalischen Vorgänge und zwar vorwiegend im Sinne einer Verschlechterung seiner Eigenschaften (entsprechend DIN 50035 /20/)

Anforderungsliste - Zusammenstellung aller Anforderungen an ein auszulegendes Bauteil

Anisotropie - Unterschiedliche Werkstoffeigenschaften (z.B. Festigkeit, Wärmeleitfähigkeit usw.) für die verschiedenen Raumrichtungen in einem Körper (Gegensatz: Isotropie)

Anstrengung - (hier spannungsbezogen) Prozentanteil der Ausnutzung der Festigkeit

Anrißlebensdauer - Beanspruchungshäufigkeit (Schwingspielzahl) bis zum erkennbaren Beginn der Schädigung (Riß)

Arbeitsspiel, Lastspiel - Eine wiederkehrende Folge von funktionsbedingten Beanspruchungen

Ausfall - Verlust der Fähigkeit eines Bauteils bei Einhaltung spezifizierter Bedingungen die geforderte Funktion zu erfüllen (VDI 4001, Bl. 2). Ausfall wird in dieser Richtlinie im Sinne von Zufallsausfall verstanden

Ausfallwahrscheinlichkeit - Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ausfall innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls und unter vorgegebenen Bedingungen auftritt

Ausgeglichener Winkelverbund - Ein mehrschichtiges Laminat, dessen Einzellagen abwechselnd die positiver und negativer Richtung liegen, d.h. winkelsymmetrisch bezüglich einer Mittellinie derart abgelegt sind, daß jeweils gleich viel Fasern in jeder Lage enthalten sind. Dieser Verbund hat orthogonal anisotrope (orthotrope) Eigenschaften

Auslegung - Festlegung wichtiger technischer Merkmale für die Konstruktion des Erzeugnisses auf Grundlage des Entwurfes (VDI 4001, Bl. 4)

Ausreißer - Meßdaten, die nicht zu einer der Stichprobe zugehörigen Grundgesamtheit gehören

"B"-Wert - (Unterer) Toleranzgrenzwert für $p = 90\%$; $C = 95\%$, einseitiges Toleranzintervall Festigkeit

(Basis-)Festigkeiten - $R_{||}^z$, $R_{||}^d$, $R_{\perp}^z$, $R_{\perp}^d$, $R_{\perp||}$ (nicht $R_{||\perp}$): Zahlenwerte aus den traditionellen Versuchen, die für isotropen Werkstoff nach ISO wie folgt lauten: $R_{p0.2}$ = Spannung bei 0.2 % bleibender Dehnung = Spannung bei definiertem Fließbeginn = Widerstand R (resistance), R_m = Spannung σ bei Brucherreichung = Widerstand = Festigkeit.

Basisvariable - (s.a. Zufallsvariable) stochastischer Konstruktionsparameter (z.B. Festigkeit), der als Zufallsgröße aufgefaßt wird

Batch - Produktionseinheit

Bauartprüfung - Qualifikationsprüfung im Hinblick auf ein materielles Endprodukt, bestehend aus Entwurfsprüfung und Typprüfung.

Bauteil - hier Teil, Komponente eines Tragsystems

Beanspruchung - hier definiert durch einwirkende Spannungen

Bedingte Zuverlässigkeit - Wahrscheinlichkeit, wenn bestimmte Vorbedingungen gegeben sind.

Bemessungspunkt - deterministisch: Auslegungspunkt, der zu einem Nachweis und zugehörigem Versagensmodus (fiktiver Bruchwert oder Gebrauchsgrenze Fließen unter DLL oder...) paßt; probabilistisch: der wahrscheinlichste Versagenspunkt

Bemessungswert - Wert, der sich aus der Multiplikation der Repräsentativwerte mit Teilsicherheitsfaktor j_R , j_S und/oder Zufügen additiver Größen ergibt. Ist der Teilsicherheitsfaktor in mehrere Faktoren aufgeteilt, so muß in jedem einzelnen Fall der zu berücksichtigende Beiwert angegeben werden

Bindungsart - Fachbezeichnung für das Webmuster von Geweben. Je nach Muster werden die Gewebe mit Bezeichnungen wie "Köper", "Leinen", "Satin" usw. hinsichtlich der Webart beschrieben. Die Webart beeinflusst die Verarbeitbarkeit und die mechanischen Eigenschaften der für die FVW-Technologie verwendeten Gewebe

Bruch - Trennung eines Ganzen in Teile. Werkstofftrennung durch Spannungseinwirkung

Bruchanalyse, schichtenweise - Berechnungsart der klassischen Laminattheorie, bei der ein Bruch in einer ES des SV beim jeweiligen Auftreten berücksichtigt wird

Bruchebene - Wirkebene maximaler Anstrengung, d.h. Ebene, in der Bruch stattfindet

Bruchfläche - morphologisch, Oberfläche des Bruchs in der Bruch"ebene"

Bruchgefahr - Kurzform für schnittwinkelabhängige Anstrengung ($\max D(\theta) = A$); nicht zu verwechseln mit Bruchwahrscheinlichkeit

Bruchgrenzfläche - Oberfläche (engl. surface) des Bruch-Versagenskörpers, der bis zu sechsdimensional sein kann. Zu jedem Punkt der Fläche gehört ein Bruchspannungszustand. Der Körper schließt alle gerade noch ohne Bruch ertragbaren Spannungszustände ein

Bruchhypothese - plausible Annahme über die Bruch verursachenden Zustände (hier Spannungszustände)

Bruchkriterium - mathematische Beziehung, die ohne Bruch ertragbare Spannungszustände von solchen unterscheidet, die nicht ertragbar sind

Bruchmechanik - Beschreibt das Verhalten von Rissen in einem beanspruchten Werkstoff und nutzt dazu Größen, die den Zustand an der Rißspitze charakterisieren

Bruchmodi - hier solche gemeint, die bei FB und ZFB auftreten. Jeder Bruchmodus ist prinzipiell einem Bruchtyp zuzuordnen

Bruchspannung - nicht zu verwechseln mit Mohrschen Bruch(ebene-)spannungen σ_n , τ_{nt} , τ_{n1}

Bruchtyp - Normalbruch, Schubbruch, Quetschbruch eines porösen Werkstoffs im Druckbereich

Bruchwiderstand der Wirkebene - Widerstand einer Spannungs-Wirkebene gegen ihren Bruch infolge einer *einzelnen* in ihr wirkenden Normal- oder Schubspannung: $R_{\perp}^A = R_{\perp}^Z$, $R_{\perp\parallel}^A = R_{\perp\parallel}$, $R_{\perp\perp}^A$ (bei sprödem Werkstoff nicht direkt meßbar; jedoch bei hier nicht betrachtetem zähem Werkstoffverhalten mit dem toridierten Rohr)

Charakteristische Werte (Dimensionierungskennwerte) - Der Hauptrepräsentativwert einer "Einwirkung" S ist sein "charakteristischer Wert". Wird dieser charakteristische Wert statistisch ermittelt, dann wird er so festgelegt, daß er mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit während eines "Bezugszeitraumes" nicht im ungünstigen Sinne überschritten wird. Dieser Bezugszeitraum ist von der vorgesehenen Lebensdauer des Tragwerkes und der Dauer der Bemessungssituation abhängig. Analoges gilt für den Widerstand R

Charge / Los - Menge von Einheiten eines Erzeugnisses, denen unterstellt wird, daß sie in den interessierenden Merkmalen übereinstimmen (VDI 4001, Bl.3). "Los" wird auch für andersartig abgegrenzte Mengen (z.B. Fertigungslos, Lieferlos) benutzt

Crossply (-Laminat) - Lamine, die wechselnd in 0° und 90° bewehrt sind.

Dauerfestigkeit - Dauerfestigkeit ist diejenige Spannung, die ein Werkstoff gerade noch beliebig oft erträgt. Zur Berechnung der Dauerfestigkeit benötigt man grundsätzlich Schwingfestigkeitsversuche normalerweise unterhalb des sog. Zeitfestigkeitsbereichs. Ziel des Versuches ist es, eine hohe Treffsicherheit mit möglichst wenigen dynamischen Versuchen zu fahren

Defekt - Störstelle im Werkstoff wie Pore, Einschluß, lokale Trennung von Filament und Matrix; auch Rißkeim, Fehlstelle genannt

Degradation - Verlust von Festigkeit, Steifigkeit etc. bei Überschreitung bestimmter Beanspruchungsgrenzen (wie z.B. ZFB)

Delamination - Schichtentrennung im SV

Deterministisches Verfahren - Nachweisverfahren, in dem die Entwurfsparameter nicht als Zufallsvariablen behandelt werden

E-Glas - E-Glas ist ein Silikatglas, welches außer Siliziumoxyd und Boroxyd in größeren Mengen Aluminiumoxyd und Calciumoxyd enthält. Man bezeichnet dieses Glas als "alkalifreies" Glas, da der Gehalt an Alkalioxyden unter 1 % liegt

Eigenspannungen (engl. residual stresses = Restspannungen) - Innere Spannungen (Gleichgewichtszustand), die z.B. infolge Temperatur in den unterschiedlich reagierenden Komponenten eines Verbundes hervorgerufen werden oder als Vorspannungen eingebracht wurden. Sie existieren im Werkstoff ohne äußere Krafteinwirkung

Einzelschicht ES (engl. ply, lamina, layer) - Grundlegende Einheit oder Bauelement mit dem ein SV, sei es Wickelverbund oder Prepreg-Laminat, aufgebaut wird. Grundeinheit der FKV-Berechnung. Kann aus mehreren gleichgerichteten Lagen, Schichten bestehen. ES-Typen sind P-ES, G-ES, W-ES, [VDI2014]

Einwirkung - Die auf das Bauteil wirkende innere oder auch äußere Kraft bzw. dadurch verursachte Schnittgrößen oder Spannungen

Elastizitätsmodul - Das Verhältnis von Spannung zu Dehnung. Unterhalb der Proportionalitätsgrenze = Anfangs-Tangentenmodul

Entwurf - Vorläufige Abschätzung und Festlegung von Gestalt, Eigenschaften und Hauptabmessungen des späteren Erzeugnisses aufgrund einer Analyse des Verwendungszweckes (VDI 4001, B1.4)

Epoxidharze (EP-Harze) - Reaktionsharze, welche mit Härtungsmitteln durch Polyaddition in den festen, unschmelzbaren Zustand übergehen. Der entstehende Formstoff gehört damit zur Gruppe der Duroplaste. Die Bezeichnung Epoxidharze leitet sich her von der wichtigsten funktionellen Gruppe dieser Harzklasse, der Epoxidgruppe, auch als Oxyranring oder Äthylenoxidgruppe bezeichnet. Als Härtungsmittel können multifunktionelle Polyamine oder Polyamidoamine sowie bifunktionelle Polycarbonsäuren und deren Anhydride eingesetzt werden. Die Härtungsreaktion läuft ohne Abspaltung flüchtiger Bestandteile ab. Der auftretende Schwund ist relativ gering (LN 29 936, B1. 2)

Ermüdung - Alterung infolge mechanischer Schwingungsbeanspruchung (VDI 4001)

Ermüdungsfestigkeit - Unter Betriebsbeanspruchungen ertragene repräsentative Spannung (z.B. als Spannungsamplitude und Mittelspannung) bei einer bestimmten Bruchlastspielzahl

Erste-Schichtversagen - s. First Ply Failure

Faltungsintegral (engl. convolution integral) - Integral zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Versagens eines Bauteils in einem bestimmten Versagensmodus wie z.B. einem ZFB-Typ

Faserbruch: Bruch von Elementarfasern im engeren Sinn, praktisch 1. FB einer ES gemeint

Faserorientierung - Ausrichtung der Fasern: 1. in einem nicht gewebten oder einem Mattenlaminat, in dem die meisten Fasern in der gleichen Richtung verlaufen und so zu einer höheren Festigkeit in dieser Richtung führen; 2. für Gewebe liegt die Orientierung je nach Webart vor, z.B. unidirektionale oder bidirektionale Gewebe

Faserverbund-Werkstoff (FVW) - Werkstoff, bestehend aus Fasern und Bettungsmasse (siehe Matrix) z.B. Kunstharz, Metall

Faservolumenanteil - Anteil der Fasern am Volumen des Verbundes (außer Harz und Luftanteil), üblicherweise mit " φ " bezeichnet oder v_f

Feinheit - Feinheit ist die in der Textilindustrie verwendete Bezeichnung für die längenbezogene Masse von Fasern und Garnen. Sie wird in "tex" angegeben: 1 tex = 1 g/1000 m. Für die Kunststoffverstärkung betragen die Spinnfadenfeinheiten der verschiedenen Textilglas-Produkte in der Regel 10, 40, 80 und 150 tex. Bei 40 tex besteht der Spinnfaden z.B. aus 204 Elementarfasern von 10 μm Durchmesser. Größere Spinnfadenfeinheiten als 40 tex ergeben sich durch höhere Elementarfasern-Anzahl bzw. durch höheren Elementarfasern-Nenn Durchmesser

Festigkeit - (Basisfestigkeit) hier werkstoffbezogene Zahlenangabe für Grenzbeanspruchungen wie $R_{\perp}^z$, $R_{\perp}^d$, $R_{\perp\parallel}$ für ZFB und $R_{\parallel}^z$, $R_{\parallel}^d$ für FB

Festigkeitsanalyse - Bewertung der Beanspruchung eines Werkstoffs oder Bauteils

Filament - Elementarfaser, Begriff für eine einzelne Faser praktisch unbegrenzter Länge bestimmten Faserdurchmessers, gewöhnlich im Spinn- oder Düsenziehverfahren hergestellt, 5 bis 50 µm

Finish - (dt. Haftvermittler) - Mittel zur Endbehandlung der Oberfläche von Fasern, um bessere Verbundeigenschaften (z.B. Verringerung des Festigkeitsverlustes an Harz/Grenzfläche) zu erhalten

First Ply Failure (FPF) - Erster auftretender Riß in irgendeiner Schicht des Laminates. Dieser Riß kann durch Zwischenfaserbruch (ZFB) oder Faserbruch (FB) erfolgen

FKV-Werkstoff - Besteht aus den Werkstoffkomponenten Faser, Matrix und Interphase (material)

Fraktilwert - s. a. Quantil

Funktion - Eine durch den Verwendungszweck bedingte Aufgabe /DIN 31 051, Teil 10/

Anmerkung: Im allgemeinen Sprachgebrauch wird "Funktion" sowohl im Sinne einer "Aufgabe" als auch der "Erfüllung einer Aufgabe" oder der "Fähigkeit zur Erfüllung einer Aufgabe" verwendet

Gaußsche Normalverteilung - Die am häufigsten angewendete Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Gel-Coat - Eine schnell erstarrende Reaktionsharzmasse. Sie wird verwendet, um die Oberfläche von FKV zu verbessern und/oder einzufärben. Es handelt sich hierbei um diejenige Schicht, die als erste in die Form eingebracht wird

Gelege - Flächenförmige Erzeugnisse aus Fasern. Nicht gewebte Gebilde aus einem oder mehreren Fadensystemen, deren Fäden parallel nebeneinander und vorwiegend auf einem Trägermaterial liegen (in Anlehnung an DIN 61 850)

Gewebe - Flächenförmige Erzeugnisse aus Fasern. Flächengebilde aus Garnen, das auf einer Webmaschine hergestellt ist und aus zwei Fadensystemen (Kette und Schuß) besteht, deren Fäden sich in einer bestimmten Bindungsart miteinander verkreuzen

Glasfaserverstärkter Kunststoff (GFK) - Werkstoff aus gehärteten Reaktionsharzmassen (siehe dies) mit Glasfaserverstärkung. Er entsteht durch Tränken von Textilglasfasern (siehe dies) mit Reaktionsharzmassen (siehe dies und VDI-Richtlinie 2010, B1. 1, DIN 7728, B1.2)

Glaspunkt - auch Glasübergangstemperatur genannt. Temperatur, bei der die Kunststoffmatrix (siehe Matrix) durch sprunghafte Änderung ihrer Molekularstruktur ihre Steifigkeit und damit Funktionsfähigkeit im Verbund verliert (DIN 7724)

Grenzfläche (engl. besser interface) - Fläche zwischen zwei verschiedenen Medien: z.B. bei Glasfaser ist es die Kontaktfläche zwischen dem Glas und der Schlichte oder dem Finish, bei einem Laminat ist es die Kontaktfläche zwischen der Verstärkung und dem laminierenden Harz. Nicht zu verwechseln mit der *Ver-sagens-Grenzfläche* (hier ZFB-Grenzfläche)

Grenzzustandsfunktionen - Funktion für Versagensmodus i , $g_i(\underline{X}) = 0$ wie Knicken, FB, ZFB. (Diese können zu Überschreitungsproblemen oder zu Kritische-Bereichsproblemen gehören)

Grenzzustand der Tragfähigkeit - Grenzzustand, der im Zusammenhang mit dem Nachweis der Tragsicherheit verwendet wird

Grundbeanspruchungsart - Beanspruchung einer P-ES durch $\sigma_{||}$ oder $\sigma_{\perp}$ oder $\tau_{\perp||}$. Führt zu den Basisfestigkeiten $R_{||}$, $R_{\perp}$, $R_{\perp||}$

Grundgesamtheit - Gesamtheit von betrachteten Einheiten /ISO 3534/ einer Population

Güte - Ausführungsqualität

Härter - Härter im Sinne der einschlägigen Kunststoff-Normen sind Stoffe oder Stoffgemische, die die Polymerisation (Metacrylat-, UP-Harze) oder Polyaddition (Ep-Harze) und damit das Härten bewirken (DIN 16 945, B1. 1)

Härten - Bezeichnung für den Übergang von Reaktionsharzmassen in dreidimensionale vernetzte Produkte. Es wird dabei zwischen drei Reaktionsarten unterschieden: Polymerisation, Polyaddition, Polykondensation (VDI-Richtlinie 2010, B1. 1)

Häufigkeit - (VDI 4001, B1. 5) absolute H.: Anzahl der Beobachtungswerte, die gleich einem vorgegebenen Wert sind, oder zu einer Menge von vorgegebenen Werten gehören.

relative H.: Absolute Häufigkeit, dividiert durch die Gesamtzahl der Beobachtungswerte

Häufigkeitsverteilung - Allgemeine Bezeichnung für den Zusammenhang zwischen den Beobachtungswerten und den absoluten und relativen Häufigkeiten bzw. Häufigkeitssummen

Haftvermittler - Substanzen zum Verbessern der Haftung der Faserverstärkung zu Kunstharzschichten und im weiteren Sinne auch zu anderen Werkstoffen. Der Haftvermittler kann auf die Verstärkung aufgetragen und/oder dem Kunstharz beigemischt sein (in Anlehnung an DIN 61 850)

Harzsystem - Es besteht aus bis zu vier Komponenten: dem Reaktionsharz, dem Verdünner, dem Härter und dem Beschleuniger. Manchmal auch als Matrixsystem bezeichnet

Haupt(normal)spannungen - $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$

Homogen - 1) In Bezug auf einen Werkstoff: aus Gleichartigem aufgebaut. 2) In Bezug auf den Spannungszustand: über größere Bereiche relativ unveränderlich. 3) In Bezug auf eine Funktion, hier die ZFB-Funktion F: sie ist bezüglich der variablen Spannungen homogen vom Grad r, wenn bei Multiplikation aller auftretenden Spannungen mit dem Faktor λ (proportionale Laststeigerung) aus F der Faktor λ^r ausgeklammert werden kann

Interaktion - hier: Zusammenwirken von Spannungen bzgl. eines Bruchmechanismus

Interface (Grenzfläche) - Fläche zwischen zwei verschiedenen Medien: z.B. bei CFK: Kontaktfläche zwischen der Kohlenstofffaser und der Matrix. Idealierte zweidimensionale Beschreibung der Interphase

Interlaminare Schubfestigkeit - Schubfestigkeit zwischen den ES eines SV (ILSS)

Interlaminare Schubspannung - Schubspannung zwischen den ES eines SV (ILS)

Interphase (Interphasenmaterial) - Material zwischen der reinen Faser und der reinen Matrix. Besteht im wesentlichen aus einem Bereich, in dem sich die Schlichte, die Schutzschicht auf der Faser (unausgehärtetes Haz), in der Matrix löst.

Intralaminare Schubspannung - Schubspannung τ_{21} in der ES-Ebene eines SV

Invariant - unveränderlich bei Veränderung des KOS

Invariante - hier eine Funktion von Spannungen, deren Wert nicht vom gewählten KOS abhängt

Isotrop - nicht richtungsabhängig

Klassische Laminattheorie (engl. CLT) - Elastizitätstheorie (Kontinuumstheorie) für SV

Kohlenstoffaserverstärkter Kunststoff (CFK) - Werkstoff aus gehärteten Reaktionsharzmassen (siehe dies) mit Kohlenstoffaserverstärkung. Er entsteht durch Tränken von Kohlenstofffasern (siehe dies) mit Reaktionsharzmassen (VDI-Richtlinie 2010 B1. 1; DIN 7728 B1. 2). /FAM2/

Komponente - 1. Materialien aus denen ein FKV-Werkstoff besteht, hier z.B. Faser, Matrix und Interphase. 2. Materialien, aus denen ein Harzsystem gemischt wird. 3. Mechanische Komponente (hier Komponenten oder Teile von Komponenten einer Trag-Struktur wie Behälter, Fachwerk. Kann ebenfalls kritische Stelle einer Tragstruktur sein) oder eine Systemversagenskomponente sein

Konstruktion (engl. design) - Gestaltung und Bemessung des späteren Erzeugnisses in allen für seine Fertigung notwendigen und hinreichenden Einzelheiten (VDI 4001, Bl. 4)

Konstruktionsparameter - Parameter der Konstruktion nicht nur einer Struktur. Diese können Entwurfsvariable (anfänglich unbekannt, gesucht) oder feste Größen (q beim Entwurf). Die Konstruktionsparameter können darüberhinaus deterministisch (x) oder stochastisch (X) sein.

Kontinuumstheorie - Elastizitätstheorie zur Berechnung eines elastischen Kontinuums, hier, der noch ungerissenen Faserverbundstruktur

Korrelation - Allgemeine Bezeichnung für den stochastischen Zusammenhang zwischen zwei oder mehreren Zufallsvariablen (nach DIN 55 350, Teil 21)

Korrelationskoeffizient - Normierte Kovarianz zweier Zufallsvariablen

Kreuzverbund (engl. Crossply) - SV, der abwechselnd in 0° und 90° bewehrt ist

Kriechen - Irreversible Formveränderung eines Kunststoffes unter Belastung über einen bestimmten Zeitraum, wobei die elastische Anfangsdeformation nicht berücksichtigt wird

Kritische Schadenssumme - die bei der Miner-Regel beim Ausfall des Bauteiles quantitativ erfaßte Schädigung, empirisch ermittelt aus dem Vergleich Rechnung - Versuch

Kunststoff - Im allgemeinen ein Werkstoff, der künstlich aus Makromolekülen organischen Ursprungs hergestellt wurde. Je nach Gestalt der Makromoleküle unterscheidet man drei große Gruppen von Kunststoffen:

Thermoplaste (kettenförmige, d.h. lineare Makromoleküle), Duroplaste (räumlich vernetzte Makromoleküle, Elastomere (wie Duroplaste mit Bruchdehnung > 100 %)

Kurzfasern - Nach DIN 61 850 sind das Einzelfasern mit Längen < 1 mm, die als Verstärkungsfüllstoff für Kunststoffe verwendet werden. In der Faserverbund-Strukturtechnologie versteht man darunter auch längere Einzelfasern

Lage - Abgelegte Prepregschicht, s. a. Schicht

Lagenfolge - Anordnung der ES nach ihrer Faserorientierung im SV

Laminat - Ein sich aus mehreren abgelegten Schichten aufbauender Schichtenverbund (SV)

Laminat-Mittelspannungen - Gemittelte Spannungen über die SV-Schalendicke

Lastfall - Ein Lastfall ist eine Lastanordnung mit Zahlenwerten, die sich aus einer bestimmten Lastkombination ergeben

Last, sichere - Die sichere Last ist die unter normalen Betriebsbedingungen zu erwartende höchste Last (design limit load)

Lastkollektiv - Gesamtheit oder Teilgesamtheit der in einer bestimmten Verwendungsspanne auftretenden Lasten, die in der Regel nach Größe und Häufigkeit geordnet sind.

Lastpfad - hier im Sinne von "proportional loading" gesehen. Das "Versuch-Fahren" geschieht mit konstanten Spannungsverhältnissen.

Lastspiel - Eine wiederkehrende Folge von funktionsbedingten Beanspruchungen (VDI 4001, Bl. 4)

Lebensdauer - Verwendungsspanne (z.B. Kalenderzeit, Betriebszeit, Fahrstrecke usw.), in der das Bauteil unter vorgegebenen Beanspruchungen bei Einhaltung festgelegter Betriebs- und Materialerhaltungsvorschriften funktionsfähig und betriebssicher bleibt

Logisches System der Versagensmodi - s. prob. Modell

Los (engl. lot) - Betrachtungseinheit z.B. Spulen gleicher Produktion

Makromechanik - hier: Betrachtungsweise, bei der die ES als homogen angesehen wird

Masterfläche - Oberfläche eines Bruchkörpers, der durch Bruchbedingungen vom Mohrschen Typ modelliert wurde, d.h. in Verwendung von Mohrschen Bruch(ebene-)spannungen

Matrix - Gieß- bzw. formbare und härtbare Bettungsmasse (z.B. Kunststoffe, Metalle, Keramiken), die als Bindemittel im Faserverbundwerkstoff die am Verbundkörper angelegte Last auf alle Fasern überträgt und die Fasern stützt. Ausgehärtetes Harzsystem

Matte - Nicht gewebtes Flächengebilde einheitlichen Flächengewichtes aus Verstärkungsfaser-Spinnfäden (DIN 61 850) /FAM2/

Mechanisches Modell - Mechanisch-mathematische Beschreibung der Struktureigenschaften

Merkmalswert - Einzelne Beobachtung aus einer Grundgesamtheit (z.B. Festigkeitswert)

Mikromechanik - hier: Betrachtungsweise im Größenbereich μm der Elementarfaser

Miner-Regel - Rechenverfahren zur quantitativen Erfassung der fortschreitenden Schädigung des Werkstoffes durch Schwingbeanspruchung, die zum Ausfall des Bauteiles führt

Mittelwert (arithmetischer) - Stichprobe $\bar{x} = (\sum x_j) / n$; Grundgesamtheit: μ

Modell - Vereinfachte theoretische Vorstellung von einem realen Vorgang wie z.B. Bruch. Auch die entsprechende mathematische Formulierung wird als "Modell" bezeichnet

Mohrscher Kreis - Grafische Konstruktion zur Ermittlung der Bruchebenespannungen auf einer zu den Hauptnormalspannungen geneigten Schnittebene (Wirkebene)

Nachweis einer Funktion - z.B. Tragfähigkeit, Festigkeit, Dichtigkeit. Auf verschiedenen Ebenen möglich: Last, Schnittgröße, Spannung

Naßwicklung - Beim Faserwickeln werden die Verstärkungsfasern mit Harz getränkt, bevor sie auf den Dorn gewickelt werden.

Netztheorie - Diejenige Theorie von zweidimensionalen Faserverbundstrukturen, bei der die Fasern allein tragend angenommen werden und die Lastaufnahme der Matrix Null gesetzt wird. Dabei sollen die Fasern nur Zugspannungen erhalten. Mit der Netztheorie ausgelegte Schalen besitzen theoretisch keine Biege- und Schubsteifigkeit und ertragen nur Membranbeanspruchungen

Nullhypothese - Hypothese, die verworfen oder nicht verworfen (angenommen) werden soll auf Grund des Ergebnisses einer Prüfung. Sie wird mit H_0 bezeichnet./ISO 3534/

Oberflächenbehandlung - Hierbei wird mit einem chemischen Mittel die Oberfläche von Fasern zur Erzielung verbesserter Verbundqualität behandelt

Oberspannung - Größter Wert der Spannung innerhalb eines Schwingspieles, unabhängig vom Vorzeichen (DIN 50 100)

Orthotropie - Bei Orthotropie (Orthogonale Anisotropie) liegen drei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieebenen bezüglich der Orientierung bestimmter gerichteter Werkstoff- oder Bauteileigenschaften vor

Polyesterharz, ungesättigt (UP) - Ungesättigtes Polyesterharz ist ein Harz auf der Basis von Polyestern, bei dem mindestens eine der Komponenten Polyalkohol - oder Polykarbonsäure - ungesättigt ist. Es gehört zu der Gruppe der Reaktionsharze (LN 29 363, B1. 2)

Poren - Gasförmige Einschlüsse in einem ausgehärteten Laminat

Porosität - Verhältnis des Luft- oder Leervolumens innerhalb eines Werkstoffes zum Gesamtvolumen (fester Werkstoff plus Luft und Leere) in Prozent

Prepreg - Matten, Gewebe, nicht verwobene Materialien, Rovings usw., die mit Kunststoffmatrix vorimprägniert bzw. getränkt sind. Üblicherweise werden Prepregs aus FKV im vorgehärteten Zustand der Reaktionsharzmasse belassen und sind damit vorbereitet für das Laminieren. Sie werden mit Temperatur und meistens unter Druck ausgehärtet

Primärstruktur - Wichtige Struktur eines Gesamtsystems, die im Falle eines Versagens die Funktionsfähigkeit des Gesamtsystems wesentlich einschränkt oder beendet

Probekörper - hier: Prüfling bei Werkstoffversuchen

Prooftest - Versuch, zum Beweis des Ertragens einer bestimmten Einwirkungshöhe (z.B. Annahmetest)

Prüfling - Gegenstand, der bei einem Test untersucht wird (VDI 4001, B1.3)

Prüfung - Vergleich des Verhaltens der Zustands- und Funktionsmerkmale (einschließlich Zuverlässigkeit) einer BE unter funktions- und umweltbedingten Belastungen mit den in den Spezifikationen festgelegten Anforderungen

Qualifikation - Amtliche Prüfung der für ein Bauteil geführten Funktionsnachweise mit der abschließenden Bescheinigung, daß es als Typ bzw. Muster die für die Verwendung geforderten Eigenschaften besitzt.

Qualität - Gesamtheit von Eigenschaften und Merkmalen eines Produktes oder einer Tätigkeit, die sich auf deren Eignung zur Erfüllung gegebener Erfordernisse beziehen.

Quantil - Wert, für den die Verteilungsfunktion einen vorgegebenen Wert p annimmt oder bei dem sie von einem Wert unter p auf einen Wert über p springt (nach DIN 55 350)

Quasi-isotropes Laminat - Ein Laminat, das bezüglich bestimmter Eigenschaften in der Ebene isotropes Verhalten zeigt

R-Wert (Spannungsverhältnis) - Quotient aus Unter- und Oberspannung eines Spannungsschwingspiels, Vorzeichen berücksichtigen

Realisationen - Zufällige Werte eines Merkmals, hier des Konstruktionsparameters Festigkeit

Redundanz - Funktionsbereites Vorhandensein von mehr als für die vorgesehene Funktion notwendigen, z.B. lastaufnehmenden Konstruktionsteile

Reservefaktor - Verhältnis von tatsächlicher Bruchlast zu Entwurfsbruchlast oder Verhältnis von Bruchspannung zu Entwurfsbruchspannung. $f_{Res} = 1/\text{Anstrengung}$, falls Restspannungen fehlen

Restfestigkeit - Ist diejenige Spannung, die eine vorgeschädigte Probe im stat. Kurzzeitversuch gerade noch erträgt. Die dynamische Vorschädigung einer Probe, die ursprünglich praktisch ohne Fehler oder Riß ist, kann z.B. aus einem Ermüdungsversuch unterhalb des Wöhlerlinien-Spannungsniveaus resultieren oder aus einem Schlag. Eine Vorschädigung liegt bei einer rißbehafteten Probe - wie bei den Restfestigkeitsversuchen der Bruchmechanik - von Anfang schon vor. Im Fall der metallischen Werkstoffe gibt es einen formelmäßigen Zusammenhang mit der Rißlänge, der anliegenden Spannung und einem Geometriefaktor, der die endlichen Abmessungen der Probe berücksichtigt. Selbstverständlich kann auch eine statische Vorschädigung infolge Kriechen vorliegen

Risiko - Produkt aus einer definierten Schadensgröße und der Wahrscheinlichkeit für diesen Schadensfall (VDI 4001, Bl.2)

Riß - Translaminar (z.B. Einzelriß durch ein Laminat), interlaminar (Delamination), intralaminar (kleine Risse, Mikrorisse in einer ES, die evtl. zu einer Schädigungszone gehören)

Roving - Bestimmte Anzahl annähernd parallel zu einem Strang zusammengefaßter Spinnfäden

Schaden - Zustand nach Überschreiten eines bestimmten (festzulegenden) Grenzwertes der Sollzustandsabweichung (Schädigungsgrenzwert), der eine verwendungsspezifische, unzulässige Beeinträchtigung der Funktionsfähigkeit bedingt

Schädigung - Beanspruchungsbedingte negative Beeinträchtigung der Eigenschaften (z.B. Abnutzung) ohne Beeinträchtigung der Funktionssicherheit bzw. -fähigkeit solange ein zulässiger Schädigungsgrenzwert nicht überschritten wird

Schicht - Beim Aufbau von Laminaten aus UD-Prepregs oder beim Faserwickeln identisch mit der ES. Beim Aufbau mit Gewebeprepregs besteht eine Schicht aus mindestens zwei ES verschiedener Orientierung

Schichtenverbund (SV) - Verband von gewickelten Schichten oder Laminat aus Prepregs

Schnittgröße - Die Schnittgrößen sind die durch Einwirkungen verursachten Beanspruchungen von Tragwerksteilen: Momente und Kräfte (M, N, Q, T usw.). Breitenbezogen (bei Schalen) heißen sie Momenten- und Kraftflüsse (m, n, q, t)

Sensitivität - zeigt die Empfindlichkeit bzgl. eines Konstruktionsparameters an (ISO 2394)

Seriensystem - Versagenssystem, dessen Ausfallwahrscheinlichkeit p_f mit der Anzahl der Systemelemente ansteigt (Kette)

Sicherheitsfaktor - Definitionen eines "Auslegungsfaktors" zur Erzielung von Sicherheit

Sicherheitsmarge (MS) - Deterministische Sicherheitsspanne, $f_{Res} - 1$, bei Nachrechnung der ausgewählten Geometrie

Sicherheitsnachweis - Dokument, in dem in prüfbarer Form gezeigt wird, daß die vorgegebenen sicherheitstechnischen Anforderungen eingehalten werden. Anforderungen sind im allgemeinen in sicherheitstechnischen Vorschriften zusammengefaßt

Spannungsintensität(sfaktor) - Entspricht Bruchzähigkeit (engl. Fracture Toughness) der Bruchmechanik. Sie ist von äußerer Last, Rißlänge und Probengeometrie abhängig

Spannungskonzentrationsfaktor - Das Verhältnis der Maximalspannung im gestörten und ungestörten Bereich; Beispiel: Zugstab mit und ohne Kerbe

Spannungsrelaxation - Der Spannungsabfall unter konstanter Dehnung

Standardabweichung - Positive Quadratwurzel aus der Varianz mit dem Ergebnis: σ für Grundgesamtheit, $s = \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)}$ für Stichprobe

Statistische Parameter - Parameter der Verteilung $f(X_j)$ für NV, LNV, WV

Stichprobe - Ein oder mehrere Prüflinge, die zufällig, also ohne Rücksicht auf ihre Qualität, aus dem Los oder der Charge ausgewählt werden /DIN 40 080/ (VDI 4001, Bl.3)

Stochastisches Modell der Konstruktionsparameter - statistische Erfassung (μ_X , σ_X , f_X) des beobachteten streuenden Konstruktionsparameters X_j und seiner Korrelationen ρ_{ij}

Streckungsfaktor - schnittwinkelabhängiger Reservefaktor ($\min f_{Str}(\theta) = f_{Res}$)

Stichprobe - Eine Anzahl von Prüflingen, die zufällig, also ohne Rücksicht auf ihre Qualität, aus dem Los oder der Charge ausgewählt werden /DIN 40 080/

Tangentenmodul - Derjenige Modul, der in jedem Punkt einer Spannungs-Verzerrungskurve durch Anlegen der Tangente ermittelt werden kann

Teil-Sicherheitsfaktor - Dieser Begriff beschreibt Beiwerte für Einwirkungen, deren Wert die Unsicherheiten der Einwirkungen wiedergibt oder Beiwerte für Werkstoffe (wie Festigkeiten), deren Wert die Unsicherheiten in den Werkstoffeigenschaften wiedergibt. Die Beiwerte sind auf den charakteristischen Wert oder den Nominalwert der betreffenden Größe bezogen.

Teilsystem - Teil eines Systems

Test - Versuch oder Prüfung. Test wird als Oberbegriff verwendet. Der Gegenstand eines Tests wird als Prüfling oder Probekörper bezeichnet

Test-Plan - Technisches Dokument, das folgendes enthält: Zweck des Tests, Test Spezifikation, Definition des zu prüfenden Produktes

Tex - Strangfeinheit in g/km

Toleranzgrenze - Begrenzender Wert (oberer und unterer), der für eine Größe festgelegt ist /ISO 3534/

Toleranzintervall (statistisches) - In diesem Intervall (das einseitige T. wird z.B. bei der Ermüdungsdauer benutzt und das zweiseitige T. bei einer Waddickenverteilung oder dem E-Modul) liegt der spezifische Teil p der Merkmalswerte

Topfzeit - Diejenige Zeitdauer, bei der das mit Katalysatoren versehene Harz so viskos bleibt, daß es verarbeitet werden kann, also Verarbeitungszeit

Trennmittel - Hilfsmittel, die das Entformen von z.B. verstärkten Kunststoffteilen ermöglichen sollen. Man unterscheidet folgende Arten: Folien, Trennlacke (filmbildend), Trennpasten oder -öle auf Wachs-, Paraffin- oder Siliconbasis

Typprüfung - Qualitätsprüfung an einem Produkt

Überlebenswahrscheinlichkeit - Komplement der Ausfallwahrscheinlichkeit p_A zu Eins (Ausfallwahrscheinlichkeit + Überlebenswahrscheinlichkeit = 1) (gem. DIN 40 042)

Unidirektional-Laminat (UD) - Ein Laminat, das unter Verwendung nicht verwobener Verstärkungsfasern erzeugt wurde, die alle parallel gelegt worden sind.

Variable - Größe, welche jeden Wert aus einem spezifizierten Wertebereich annehmen kann

Varianz - a) einer Basisvariablen: Erwartungswert des Quadrates der zentrierten Basisvariablen. b) von Beobachtungswerten einer Stichprobe: Summe der quadrierten Abweichungen der Beobachtungswerte von ihrem arithmetischen Mittelwert, dividiert durch die um 1 verminderte Anzahl der Beobachtungswerte. (DIN 55 350)

Variationskoeffizient - Stichprobe $v_x = s/\bar{x}$; Gesamtheit $v = \sigma / \mu$

Verfahren mit Teil-Sicherheitsfaktoren - Nachweisverfahren, in dem die den Entwurfsparametern zuordnenbaren Unsicherheiten und Streuungen mit Hilfe von Teil-Sicherheitsfaktoren berücksichtigt werden

Verfahren mit zulässigen Spannungen - Nachweisverfahren, in dem die unter den erwarteten Höchstlasten auftretenden Spannungen mit einem reduzierten Werkstoffwiderstand verglichen werden

Versagen - (s.a. Ausfall) Unbrauchbarwerden, Bruch, Fließbeginn, ...

Versagensart oder modus(engl. failure mode) - Grenzzustand wie Fließbeginn, Totalbruch, Instabilität, Vibration, Grenze einer bestimmten Verformung, ZFB oder FB

Versagens-Grenzfläche - Z.B. bei Festigkeitsproblemen für Fließbeginn, Zwischenfaserbruch, Faserbruch.

Versagenshypothese - Idee über die Ursache eines Versagens, unter welchen Bedingungen ein Beanspruchungszustand z.B. spröden Trennbruch hervorrufen kann

Versagenskategorien - Katastrophal, groß, klein, vernachlässigbar

Versagenskriterien (engl. failure criteria) - Beziehungen zur Erfassung der Beanspruchung eines Werkstoffs unter mehrachsigen Spannungszustand

Versagenskriterium - Quantitative Meßgröße in Form einer mathematischen Funktion F. Gibt die Möglichkeit der Festigkeitsbewertung eines kombinierten Beanspruchungszustandes $\{\sigma\}$ aus den üblichen, gemessenen *Basis-Festigkeitswerten* , nachdem das Kriterium verständlicherweise vorher durch Versuche mit kombinierten Beanspruchungszuständen verifiziert und kalibriert wurde. Es gilt:

	< 1	kein Versagen
$F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau)$	$= 1$	Grenzzustand $MS = 0$ bzw. $f_{Res} = 1$, Versagensbedingung
	> 1	Überschreitung des Grenzzustandes, Durchstoßung der Versagensgrenzfläche.

Normalspannungen σ und Schubspannungen τ sind generell mit ihren Vorzeichen einzusetzen.

Für das *Wirkebene-Festigkeits(versagens)kriterium* lautet der Grenzzustand bzw. die Versagensbedingung $F(\sigma^A, \tau^A, R_\sigma^A, R_\tau^A) = 1$. Sie stellt die sog. Grenzfläche (failure surface) dar

Versagensmodus(-art) Bruch - hat beim UD-FKV zwei Submodi, FB und ZFB

Versagenswahrscheinlichkeit - Wahrscheinlichkeit p_f in %, mit der ein Bauteil nach dem probabilistischen (wahrscheinlichkeitstheoretischen) Sicherheitskonzept versagt. Der Berechnung von p_f liegt die Kenntnis der statistischen Parameter der Grundverteilungen von sog. Einwirkungen (z.B. Spannung) und sog. Widerstand (z.B. Festigkeit) zugrunde

Versagenszustand - Zustandsfunktion $g_i = F_i - 1 < 0$

Verschmieren - hier: theoretische Umwandlung eines mit Defekten behafteten Werkstoffs in einen homogenen Werkstoff

Verstärkung - Material, das zur Verbesserung der Festigkeit, Steifigkeit und Schlagfestigkeit in einem Kunststoff eingebunden ist. Verstärkungen bestehen normalerweise aus langen Fasern aus Glas, Kohlenstoff, Aramid, Asbest, Sisal, Baumwolle, etc., entweder gewebt oder ungewebt. Damit die Wirksamkeit groß ist, muß das Verstärkungsmaterial eine feste Bindung mit dem Harz eingehen

Verteilungsfunktion - Funktion, welche für jedes x die Wahrscheinlichkeit angibt, daß die Zufallsvariable X kleiner oder gleich x ist (nach DIN 55 350, Teil 21)

Verteilungsparameter - Siehe statistische Parameter

Vertrauensniveau (Konfidenzniveau) - Mindestwert $C = 1 - \alpha$ der Wahrscheinlichkeit, der für die Berechnung eines Vertrauensbereiches oder eines statistischen Anteilsbereiches vorgegeben ist (nach DIN 55 350). Ist ein gewählter Wert C , der bei Schätzproblemen die Wahrscheinlichkeit C dafür angibt, daß der Vertrauensbereich den wahren Wert des geschätzten Parameters enthält. Übergang Stichprobe zur Grundgesamtheit

Wahrscheinlichkeitsdichte - Erste Ableitung der Verteilungsfunktion, falls sie existiert (DIN 55 350 Teil 21). Bezeichnung der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = dF(x)/dx$

Weibull-Verteilung (WV) - Diese Verteilung besitzt bis zu drei freie Parameter, mit denen sie sehr gut an unterschiedliche Merkmalsverteilungen angepaßt werden kann. Sie wird zur Darstellung von Extremwertverteilungen benutzt (z.B. Weakest Link Model) bei Kurzzeitfestigkeits- und Restfestigkeitsverteilungen

Wickelband (engl. tape) - Die Gesamtheit aller Rovings, die gleichzeitig miteinander verwickelt werden

Widerstand - Die Grenztragfähigkeit des Bauteils, gemessen in derselben Einheit wie S

Wirkebene - Schnittebene, auf der eine oder mehrere Spannungen wirken

Wirkebenegrößen: Es sind dies *Wirkebene-Spannungen* sind $\{\sigma^A\} = (\sigma_n^A, \tau_{nt}^A, \tau_{nl}^A)^T$ und die Widerstände sind $\{R^A\} = (R_{\perp}^A, R_{\perp\perp}^A, R_{\perp\parallel}^A)^T$, zugehörig zu den entsprechenden W.-Spannungen gegen Bruch in der Wirkebene. Letztere hängen vom ausgewählten Wirkebenekriterium ab.

Zufallsvariable (Letztere Basisvariable) - Veränderliche Größe, die Werte einer vorgegebenen Menge von Werten entsprechend einer dieser Menge zugeordneten Wahrscheinlichkeitsverteilung annehmen kann (DIN 55 350, Teil 21). Die Zufallsvariablen können voneinander abhängig sein.

Zulässige Spannung - Abgeminderter Festigkeitswert

Zustandsfunktion $g_i(\mathbf{X})$ - Zu einem Versagensmodus gehörende Formulierung des Zustands

Zustandsraum (engl. state space) - Raum der Zustandsvariablen X_i (prob.) mit Versagensbereich (engl. failure domain) $g_i(\mathbf{X}) < 0$, Überlebensbereich (engl. survival domain) $g_i > 0$ und Grenz(zustandsober)fläche (engl. limit state surface) $g_i = 0$ oder $F_i = 1$.

Zustandsvariable - Antwort des mathematisch-physikalischen Strukturmodells

Zuverlässigkeit $\mathfrak{R}$ - Fähigkeit einer Betrachtungseinheit, unter vorgegebenen Bedingungen während einer vorgegebenen Zeit ihre Funktion zu erfüllen. Komplement $\mathfrak{R}$ zur Ausfallwahrscheinlichkeit P_f , ($\mathfrak{R} = 1 - P_f$)

Zuverlässigkeitsermittlung - a) deterministisch, statistisch anhand beobachteter Fehlerraten der Komponenten (failure rate problem) und b) probabilistisch anhand beobachteter streuender Konstruktionsparameter der Komponenten und der logischen Verknüpfung der Versagensmodi (failure state problem)

Zuverlässigkeitsindex β - Kenngröße für Bewertung der Zuverlässigkeit des Bauteils. $P_f = \Phi(-\beta)$, $\mathfrak{R} = 1 - P_f = \Phi(\beta)$, wobei β die Quantile der Gaußschen Normalverteilung von $\mathfrak{R}$ ist.

Zwischenfaserbruch (ZFB): Mikrorisse zwischen den Fasern in der Matrix, im Interface, aber auch zwischen den Fibrillen einer Aramidfaser. Für die P-ES als freier Werkstoffprobekörper bedeutet ZFB aufgrund des "Schwächste-Glied-Verhaltens" Bruch, für die eingebettete P-ES praktisch nur Mikrorißbeginn bzw. Schädigungsbeginn wegen der "Redundanz" im SV.

LITERATUR

- [Abu94] *Abu-Farsakh, G.H. and Abdel-Jawad, Y.A.*: A New Failure Criterion for Nonlinear Composite Materials. *J. of Composite Technology & Research* 16 (1994), 138-145
- [Ada94] *Adams, D.F., Lewis, E.Q.*: Current status of composite material shear test methods; *SAMPE Journal* 31 (1994) 6, S. 32-40
- [AGA82] AGARD-LS-124: Practical Consideration of Design, Fabrication and Tests for Composite Materials. 1982
- [Ahr94] *Ahrend, U.*: Entwicklung eines Versuchs zur Untersuchung von ZFB in UD-FVK (unter Quer/Quer-Schub- und Quer-Normalbeanspruchung); unveröff. Diplomarbeit, IKV, RWTH Aachen, 1994
- [Arc78] Arcan, M., Hashin, Z. and Voloshin, A.: A Method to Produce Uniform Plane-Stress States with Applications to Fiber-Reinforced Materials. *Proc. of the Society for Exp. Stress Anal.* 35 (1978), 141-146
- [Ash86] *Ashbee, K.H.G.*: Bi-Dimensional Compression Moulding of Super-High Fibre Volume Fraction Composites; *Journal of Composite Materials* 20 (1986) 3, S. 114
- [ASM] ASM-International: Engineered Materials Hdbk. Vol I "Composites"
- [Awa78] *Awaji, H. and Sato, S.*: A Statistical Theory for the Fracture of Brittle Solids under Multiaxial Stresses. *International Journal of Fracture* 14 (1978), R13-16
- [Bar82] *Bardenheier, R.*: Mechanisches Versagen von Polymerwerkstoffen: Anstrengung mehrachsiger Spannungszustände. *Kunststoffe-Fortschrittsberichte Band 8*, München 1982
- [Bas88] *Bascom, A.C. and Gweon, S.Y.*: Fractography and Failure Mechanisms of Carbon Fiber-Reinforced Composite Materials. In *Fractography and Failure Mechanisms of Polymers and Composites*. Editor A.C. Roulin-Moloney, Elsevier - London/New York (1988), 351-386
- [Bat74] *Batdorf, S.B., Crose, J.G.*: A Statistical Theory for the Fracture of Brittle Structures Subjected to Nonuniform Poliaxial Stresses. *Journal of Applied Mechanics, Ser. E* 41(2) (1974), 459-464
- [Bla88] *Black, Jr., J.B.*: "Failure Criterion No. 1.075.372". Internal Douglas document dated 4-22-88
- [Boe87] *Boehler, J.P., Aoufi, L.-E. and Raclin, J.*: On Experimental Testing Methods for Anisotropic Materials. *Res. Mechanica* 21 (1987), 73-95
- [Bre96] *Brede, M.*: Rechenprogramm zur Darstellung von Bruchgrenzflächen (BRUKAN-GRAPHIK). AG Ingenieurmathematik, Universität Gh Kassel, 1996
- [Brei84] *Breitung, K.*: Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals. *Journ. Eng. Mech., ASCE*, 110, 3, (1984), 357-366
- [BRU96] *Jeltsch-Fricker, R., Zeise, D. und Fabisch, St.*: BRUKAN, Programm zur Bruchkurvenanalyse des ZFB bei UD-FKV; Version 3.01, 30.06.96, Gh Kassel
- [Cal96] *Calvo De No, R.*: Weiterentwicklung eines Versuchs zur Ermittlung der Bruchwinkel von ZFB in UD-FVK (unter Quer/Quer-Schub- und Quer/Längs-Schubbeanspruchung); unveröffentlichte Diplomarbeit am IKV, RWTH Aachen, 1996
- [Car89] *Carlsson, L. and Pipes, R.B.*: Hochleistungsfaserverbundwerkstoffe; deutsche Übersetzung von "Experimental characterization of advanced composite materials". Teubner Verlag, Stuttgart, 1989
- [Cha69] *Chamis, C.C.*: Failure Criteria for Filamentary Composites. *Composite Materials: Testing and Design* (1. Konferenz) ASTM STP 460 (1969), 336-351
- [Cha77] *Chamis, C.C. and Sinclair, J.H.*: Ten-deg Off-Axis Test for shear Properties in Fibre Composites; *Experimental Mechanics* 14 (1977), 339-346
- [Cha96] *Chatterjee, S.N.*: A Coulomb-Mohr Type Criterion for Matrix Mode Failure in a Lamina. *Proceedings of 13th Symp. on Composite Materials: Testing and Design*. May 1996

- [Che93] *Chen, A.S. and Matthews, F.L.*: A review of multiaxial/biaxial loading tests for composite materials; *Composites* 24 (1993) 5, 395-406
- [Cho85] *Choo, V.K.S.*: Effect of Loading Path on the Failure of Fibre Reinforced Composite Tubes. *J. Comp. Mat.* 19 (1985), 525-532
- [Chr88] *Christensen, R.M.*: Tensor Transformations and Failure Criteria for the Analysis of Fiber Composite Materials. *J. Comp. Mat.* 22 (1988) 874-897
- [Col74] *Collings, T.A.*: Transverse Compressive Behaviour of Unidirectional Carbon Fibre. Reinforced Plastics. *Composites* (1974), 108-116
- [Com96] COMREL Users Manual, RCP GmbH Munich, 1996
- [Cou76] *Coulomb, C.A.*: Sur une Application des Règles de Maximis et Minimis a quelques Problèmes de Statique, relatifs a l'Architecture. Mémoires de Mathématique et de Physique, Academie Royal des Sciences par divers Savans, Année 1773, Paris, France, 1776
- [Cui92] *Cui, W.C., Wisnom, M.R. and Jones, M.*: A Comparison of Failure Criteria to Predict Delamination of Unidirectional Glass/Epoxy Specimens Waisted Through the Thickness. *Composites* 23 (1992), 158-166
- [Cun88] *Cuntze, R.G.*: Influence of the Stochastic Behaviour of Design Parameters on the First Ply Failure (FPF) in Pressurized CFRP Tubes. ESA/ESTEC, March 1988
- [Cun93a] *Cuntze, R.G.*: A Physically based 2D/3D-Inter-Fibre-Failure Criterion for brittle UD-layers - Hashin's idea and Puck's realization -. Key-note lecture, ISODUR 93, Porto, July 18-21
- [Cun93b] *Cuntze, R.G.*: Deterministic and Probabilistic Prediction of the Distribution of Inter-Fibre Failure Test Data of Prestrained CFRP Tubes composed of Thin layers and loaded by radial pressure. Wollongong. *Advanced Composites '93*, pp 579-585. The Minerals, Metals & Materials Society, 1993
- [Cun94] *Cuntze, R.G.*: Evaluation and Application of a New Physically Based 2D/3D-Inter-Fibre-Fracture (IFF) Criterion. ESA/ESTEC, Symposium, Noordwijk, March 1994
- [Cun96a] *Cuntze, R.G.*: Zum verbesserten Festigkeitsnachweis von FKV-Bauteilen. *Werkstoffwoche 96*, Stuttgart 28.-31. Mai 1996, Konferenzhandbuch
- [Cun96b] *Cuntze, R.G. and Zaun, J.*: Finite Element Investigations on "A Unit Fibre-Matrix Cell" subjected to the Basic Load Cases σ_2^c , σ_2^t , τ_{21} , 100° C and Chemical Shrinking of 1 ‰ in the Solid Phase (unpublished)
- [DIN] DIN 65071: Teil 2: Luft- und Raumfahrt; Faserverstärkte Formstoffe; Herstellen von Prüfplatten aus flächenförmigen Verstärkungsfaserprodukten
- [DIN80] DIN 13316: Mechanik ideal elastischer Körper. - Begriffe, Größen, Formelzeichen, Sept. 1980
- [DIN85] DIN 65352: Methode zur statistischen Auswertung der Prüfergebnisse bei der Qualifikation und der Abnahmeprüfung von FVW. Entwurf; Dornier GmbH (1985)
- [Edg94] *Edge Joes, E.C.*: Transverse and Shear Loading affect the compression strength of CFC? Reply to Dr. Hart-Smith; *Composites* 25 (2), 1994, Designers Corner, pp. 159-161
- [Eng92] *Engelund, S. and Rackwitz, R.*: Experiences with Experimental Design Schemes for Failure Surface Estimation and Reliability, Proc. 6th ASCE Specialty Conference "Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability", (ed. Y.K.Lin), Denver, 8.-10. July 1992, pp. 252-255
- [ESDU] *Composites sub-series in 7 volumes, Data sheet no 83014 on "Failure Criteria"*
- [Fab94] *Fabisch, St.*: Erstellung eines flexiblen, numerisch effizienten Modells einer Bruchfläche zur Beschreibung von Zwischenfaserbrüchen bei Faser-Kunststoff-Verbunden. Diplomarbeit, AG Ingenieurmathematik, Universität Gh Kassel, 1994
- [Fab96] *Fabisch, St. und Zeise, D.*: Rechenprogramm zur Bruchkurven-Analyse (BRUKAN). AG Ingenieurmathematik, Universität Gh Kassel, 1996

- [Fen91] *Feng, W.W. and Groves, S.E.*: On the Finite-strain-invariant Failure Criterion for Composites. Proceedings ICCM 8 (1993), 31G
- [Fen91] *Feng, W.W.*: A Failure Criterion for Composite Materials. J. of. Comp. Mat. 25 (1991), 88-100
- [Fla82] *Flaggs, D.L., and Kural, M.H.*: Experimental Determination of the in Situ Transverse Lamina Strength in Graphite Epoxy Laminates. J. Comp. Mat. Vol. 16 (1982), 103-116
- [Fou85] *Found, M.S.*: A review of the multiaxial fatigue test of fibre reinforced plastics. American Society for Testing and Materials (ASTM), (1985) STP 853, S. 381-395
- [Fra82] *Franke, L. and Herrmann, G.*: Fracture of UD-Glass-Fiber Reinforced Composites under Combined Biaxial Stresses. J. Reinf. Plast. Compos. 1 (1982) 4, S. 177-192
- [Fre68] *Freudenthal, A.M.*: Statistical Approach to Brittle Failure. Fracture, Vol.2 (ed.: H. Liebowitz), Academic Press, New York (1968)
- [FVL] LTH-FVL: Luftfahrttechnisches Handbuch "Faserverbund-Leichtbau"
- [Gäd91] *Gädke, M.*: Crack Initiation and Growth in Notched CFRP-Laminates. Proc. Internat. Conf. Spacecraft Struct. and Mech. Testing. 24.-26. April 1991 (ESA SP-321), Oct. 1991
- [Gäd92] *Gädke, M.*: Experimentelle Bestimmung von Schädigungsmechanismen in CFK-Laminaten; DLR-Nachrichten 67 Mai (1992), S. 8-15
- [Gar93] *Garbe, J. und Puck A.*: Erfahrungen mit Bruchkriterien an schwellend belasteten GFK-Drehfedern. Kunststoffe 83 (1993) 5, S. 406-411
- [Git81] *Gitschner, H.-W., Grüters, H.*: Diffusionsbedingte Eigenspannungen (Quellspannungen) und Deformationszustände in anisotropen glasfaserverstärkten Mehrschichten-Verbundwerkstoffen, Kunststoffe 71 (1981) 3, S. 178-183
- [Gol66] *Goldenblat, I.I. and Kopnov, V.A.*: Strength of Glass-reinforced Plastics in the complex stress state. Polymer Mechanics of Mechanical Polime-rov, Vol. 1 1966, pp. 54-59
- [Gol83] *Gollwitzer, S. und Rackwitz, R.*: Equivalent Components in First-order System Reliability, Reliability Engineering, Vol 5, 1983, pp. 99-115
- [Gol90] *Gollwitzer, S.; Grimmelt, M. and Rackwitz, R.*: Brittle Fracture and Proof Loading of Metallic Pressure Vessels, 7th international conference on reliability and maintainability, Brest, 1990
- [Gol93] *Gollwitzer, S; Zverev, A.; Cuntze, R. and Grimmelt, M.*: Structural Reliability Applications in Aerospace Engineering, 6th International Conference on Structural Safety and Reliability, Innsbruck 1993, Proc. ICOSSAR'93, Rotterdam: Balkema
- [Göt85] *Götte, T., Jakobi, R. und Puck, A.*: Grundlagen der Dimensionierung von Nutzfahrzeug-Blattfedern aus Faser-Kunststoff-Verbunden. Kunststoffe 75 (1985) 2, S. 100-104
- [Gri20] *Griffith, A.A.*: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. Phil. Trans. Roy. Soc., London, A221 (1920), 163-198
- [Gue80] *Guess, T.R.*: Biaxial Testing of Composite Cylinders: Experimental-Theoretical Comparison, Composites 11 (1980), 139-148
- [Hah75] *Hahn, H.T., Pagano, H.J.*: Curing Stresses in Composite Laminates. J. Composite Materials 9 (1975), 91-106
- [Hah82] *Hahn, H.T., Erikson, J.B. and Tsai, S.W.*: Characterisation of Matrix/Interface-Controlled Strength of Unidirectional Composites. Fracture of Comp. Materials, M. Nijhoff Publ. Den Haag, 1982, 197-214
- [Hal93] *Hall, J.C., Leon G.F. and Nuismer, R.*: The Application of the Modified Hashin's Failure Criterion and 2D Solid Finite Element Analysis to Thick Composite Structures.
- [Han84] Handbook of Composites, Vol 3: "Failure Mechanics of Composites": editors Sih and Skudra. North-Holland, 1984

- [Han88] *Han Y.M., Hahn, H.T. and Croman, R.B.*: Simplified Analysis of Transverse Ply Cracking in Cross-Ply Laminates. *Composites Science and Technology* 31 (1988), pp 165-177
- [Han93] *Hansen, W.C., Shenoy, K. and Wolff, E.G.*: Residual Strength of Graphite IBM, Composites after Long Term Cyclical Compression. *Proc. ICCM9* (1993), 524-531. (F₁₂-Problem)
- [Har84] *Hart-Smith, L.J.*: Approximate Analysis Methods for Fibrous Composite Laminates Under Combined Biaxial and Shear Loading, Douglas Aircraft IRAD Technical Report MDC-J9898, March 1984
- [Har89] *Hart-Smith, L.J.*: Simple Methods for Predicting the Strength of Cross-Plied Fibrous Composite Laminates, Douglas Paper 8377, presented to SAMPE Composites Seminar on "Repair, Maintainability and Supportability", San Diego, California, October 19, 1989
- [Har91] *Hart-Smith, L.J.*: The role of Biaxial Stresses in Discriminating between Meaningful and Illusory Composite Failure Theories. Douglas Paper MDC 91 K0077. Presentation at 9 th DoD/ NASA/FAA Conference on Fibrous Composites in Structural Design, Nov. 1991, 22 pages
- [Har92] *Hart-Smith, L.J.*: How to Calculate In-plane Strengths of Fiber-polymer Composite Laminates. Douglas Paper MDC 92 K0023. Presentation at 25th MIL Hdbk 17 Meeting, March 1992 10 pages
- [Har93] *Hart-Smith, L.J.*: Fibrous Composite Failure Criteria - Fact and Fantasy. 7. Int. Conf. on Comp. Structures, Paisley, UK, July 1993. Mc Donnell Douglas MDC 93 K 0047
- [Has73] *Hashin, Z. and Rotem, A.*: A Fatigue Failure Criterion for Fibre Reinforced Materials. *J. of Comp. Mat.* 7 (1973), 448-463
- [Has74] *Hasofer, A.M. and Lind, N.C.*: An Exact and Invariant First Order Reliability Format. *Journ. Eng. Mech., ASCE*, 100, EM1, (1974), 111-121
- [Has80] *Hashin, Z.*: Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *J. of Applied Mechanics*, June 1980, Vol. 47, pp. 329-334
- [Her82] *Herrmann, G.*: Zum Bruchverhalten gerichteter Glasfaserverbunde. Diss. TU-Stuttgart, 1982
- [Her89] *Hermann, A.*: Experimentelle und theoretische Untersuchungen von Kerbspannungsproblemen anisotrop glasfaserverstärkter Epoxidharzscheiben. Dissertation TU Clausthal (1989)
- [Hof67] *Hoffman, O.*: The Brittle Strength for Anisotropic Materials, *J. of Comp. Mat.* 1 (1967), 200-206
- [Hof77] *Hofer, K.E.; Rao, P.N.*: A new static compression fixture for advanced composite materials; *Journal of Testing and Evaluation* 5 (1977) 4, S. 219-236
- [Hoh81] *Hohenbichler, M.; Rackwitz, R.*: Non-Normal Dependent Vectors in Structural Safety. *journ. Eng. Mech., ASCE*, 107, 6, (1981), 1227-1249
- [Hoh87] *Hohenbichler, M.; Gollwitzer, S.; Kruse, W. and Rackwitz, R.*: New Light on First- and Second-Order Reliability Methods, *Structural Safety*, 4, pp. 267-284, 1987
- [Hoh88] *Hohenbichler, M.; Rackwitz, R.*: Improvement of Second-order Reliability Estimates by Importance Sampling. *Journal of Eng. Mech., ASCE*, 114, 12, (1988), 2195-2199
- [HSB] LTH-HSB: Handbuch für Strukturberechnung (HSB). IASB (Industrierausschuß für Strukturberechnung), Vorsitzender Prof. L. Schwarmann, DASA-Airbus, Bremen
- [HSF93] HSF: Handbuch für ein Sicherheitskonzept für Bauteile aus Faserkunststoffverbund (Handbook for a safety concept for structures from fibre-reinforced-plastics), 1993. Editor: Bundesamt für Wehrtechnik und Beschaffung, Koblenz. Authors: Cuntze, Gollwitzer, Grimmelt, Haberkamm, Plica, Rackwitz.
- [Huf92] *Hufenbach, W. und Kroll, L.*: Kerbspannungsanalyse anisotrop faserverstärkter Scheiben. *Archive of Applied Mechanics* 62 (1992) 4, S. 272-290
- [Huf95a] *Hufenbach, W. and Kroll, L.*: A New Failure Criterion Based on the Mechanics of 3-Dimensional Composite Materials. *ICCM-10*, Whistler, Canada, 1995

- [Huf95b] *Hufenbach, W. and Kroll, L.*: Design and Construction of hygrothermally stable shells. Ninth International Conference on Mechanics of Composite Materials (MCM 9), Riga (Lettland), 17.-20.Okt. 1995
- [Huf95c] *Hufenbach, W. and Kroll, L.*: Laminated cylindrical shells under mechanical and hygrothermal loads. *Advances in Engineering Software* 23 (1995) 3, S 83-88
- [Hus95] *Huster, M.*: Entwicklung eines Versuchs zur Bestimmung der Bruchwinkel von ZFB in UD-FKV (unter Quer/Quer-Schub- und Quer/Längs-Schubbeanspruchung). Diplomarbeit, IKV, RWTH Aachen, 1995
- [Huy94] *Huybrechts, D. and Michaeli, W.*: A New approach for the Dimensioning of Thick Laminates using Physically Based Strength Criteria. *Sampe Journal* 1994 (30)
- [Huy96] *Huybrechts, D.*: Ein erster Beitrag zur Verifikation des wirkebenebezogenen Zwischenfaserbruchkriteriums nach Puck; Dissertation an der RWTH Aachen, 1996
- [Ike82] *Ikegami, K., Nose, Y., Yasunaga, T. and Shiratori, E.*: Failure Criterion of Angle Ply Laminates of Fibre Reinforced Plastics and Application to Optimise the Strength. *Fibre Science and Technology* 16 (1982), 175-190
- [Jak87] *Jakobi, R.*: Zur Spannungs-, Verformungs- und Bruchanalyse an dickwandigen, rohrförmigen Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden, *Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 5, Nr. 126*
- [Jak87] *Jakobi, R. und Schreiber, W.*: Steigerung der Belastbarkeit von dickwandigen Torsionsrohren aus Faser-Kunststoff-Verbunden. 21. AVK-Jahrestagung, Mainz 1987
- [Jel96a] *Jeltsch-Fricker, R.*: Bruchbedingungen vom Mohrschen Typ für transversal-isotrope Werkstoffe am Beispiel der Faser-Kunststoff-Verbunde. *ZAMM* 76 (1996), 505-520
- [Jel96b] *Jeltsch-Fricker, R. und Meckbach, S.*: Schneller Löser einer Mohrschen Bruchbedingung für unidirektionale Faser-Kunststoff-Verbunde. Preprint, AG Ingenieurmathematik, Universität Gh Kassel, 1996
- [Kau58] *Kauderer, H.*: Nichtlineare Mechanik. Springer-Verlag, 1958
- [Kiu86] *Der Kiureghian, A.; Liu, P.-L.*: Structural Reliability under Incomplete Probability Information. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 112, No. 1, (1986), 85-104
- [Kna72] *Knappe, W. und Schneider, W.*: Bruchkriterien für unidirektionalen Glasfaser/Kunststoff unter ebener Kurzzeit- und Langzeitbeanspruchung. *Kunststoffe*, Bd. 62, 1972, S. 864, 868
- [Kna88] *Knappe, W., Schneider, W.*: "Bruchkriterien für unidirektionalen Glasfaser/Kunststoff unter ebener Kurzzeit- und Langzeitbeanspruchung". *Kunststoffe*, Bd. 62, 1972, 864-868
- [Kna88] *Knaust, W.*: Zur Analyse und Optimierung von Faserverbund-Leichtbauteilen. Diss. D34, Fachbereich Maschinenbau der Universität-Gesamthochschule Kassel. *Fortschr.-Ber. VDI, R.20, Nr. 11*, VDI-Verlag Düsseldorf (1989)
- [Kon96] *Kominar, V.*: Thermo-mechanical Regulation of Residual Stresses in Polymers and Polymer Composites. *J. of Comp. Mat.* 30 (1996), 406-415
- [Kop96] *Kopp, J. and Michaeli, W.*: Dimensioning of Thick Laminates using New IFF Strength Criteria and some Experiments for their Verification. *Proceedings "Conf. on Spacecraft Structures Materials and Mechanical Testing"*, ESA, 27-29 March 1996
- [Kot88] *Kothe, E.*: Kombinierte Beanspruchungen. S. 447-481 im Buch von Knauer, B. und Wende, A. "Konstruktionstechnik und Leichtbau". Berlin: Akademieverlag 1988
- [Kre93] *Kress, G.R.*: Analytische und experimentelle Untersuchung zu Versagensvorgängen in Faserverbundwerkstoffen mit besonderer Berücksichtigung der Randeffekte. *Fortschr.-Ber. VDI R.18, Nr. 130*, VDI-Verlag, Düsseldorf 1993
- [Kre94] *Kress, G.*: Free Edge Influence on CFRP-Laminate Strength. *Int. J. Damage Mech.* Vol. 3 (1994) 192-211
- [Kro92] *Kroll, L.*: Zur Auslegung mehrschichtiger anisotroper Faserverbundstrukturen. Dissertation TU Clausthal (1992)

- [Kro93] *Kropp, D.*: Entwicklung eines Versuchs zur Bestimmung des Bruchwinkels bei ZFB in UD-FKV (unter hydrostatischer Druckbeanspruchung. Rotiererbericht am IKV, RWTH Aachen, 1993
- [Kro95] *Kroll, L. and Hufenbach, W.*: New Proof of Laminate Design by a Physically based Failure Criterion. Proceedings of ICCM-10, Vol. 1, Whistler (Kanada) 1995, 715-722
- [Kru96] *Krusche, T.; Michaeli, W.*: Moderne Konzepte in der Autoklavtechnik; 18. IKV-Kolloquium, 6-8 März 1996, Aachen
- [Lab87] *Labossiere, P. and Neale, K.W.*: Macroscopic Failure Criteria for Fibre-Reinforced Composite Materials. Solid Mechanics Archives 12 (1987), 65-95
- [Lan94] *Lang, U.*: Entwicklung eines Versuchs zur Bestimmung des Bruchwinkels von ZFB in UD-FKV (unter Quer/Quer-Schubbeanspruchung); unveröffentlichter Rotiererbericht am IKV, RWTH Aachen, 1994
- [Lau95] *Lauterbach, C.*: FEM-Berechnungen mit dem wirkebene-bezogenen Festigkeitskriterium nach Puck zur Weiterentwicklung von Versuchsprobekörpern. Studienarbeit am IKV, RWTH Aachen, 1995
- [Leo35] *Leon, A.*: Über die Scherfestigkeit des Betons. Beton und Eisen 34 (1935), 130-135
- [Lud96] *Ludwig, D.*: Entwicklung eines Versuchsaufbaus zur Untersuchung von ZFB in UD-FKV (unter Quer/Quer-Schub- und Quer/Längs-Schubbeanspruchung). Studienarbeit am IKV, RWTH Aachen, 1996
- [MAN87] Herstellung von Rohrprobekörpern aus Filamentgarnen und Reaktionsharzmassen; Verfahrensnorm 438, MAN Technologie, 1987
- [Mat81] *Matsuo, Y.*: Statistical fracture theory for multiaxial stress states using Weibull's three-parameter function. Engineering Fracture Mechanics, Vol. 14 (1981), 527-538
- [Mic90] *Michaeli, W. und Wegener, M.*: Systematisches Konstruieren mit Faserverbundwerkstoffen. Teil 1: Der Konstrukteur 21 (1990) 70-74; Teil 2: Der Konstrukteur 21 (1990) 74-77
- [Mic91] *Michaeli, W. und Wegener M.*: Denken in Anisotropien - Faserverbundwerkstoffe, eine Herausforderung für den Konstrukteur? VDI-Berichte (1991), S.127-163
- [Mic91] *Michaeli, W.; Fölster, Th.; Borges, Ch. und Montag, M.*: Schnellzerreißversuche an Faser-Kunststoff-Verbundwerkstoffen mit der "Stadionprobe"; Materialprüfung 33 (1991) 3, S. 47-50
- [Mic95] *Michaeli, W.; Huybrechts, D. und Wegener, M.*: Dimensionieren mit Faserverbundkunststoffen - Einführung und praktische Hilfen - Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1995
- [Mic94] *Michel, R. und Pohl, M.*: Numerische Untersuchung eines global gültigen Wirkebene-Festigkeitskriteriums anhand von verschiedenen Faser-Verbund-Werkstoffen und zweier isotroper Werkstoffe. Studienarbeit. Universität der Bundeswehr, München, 1994
- [MIL5] MIL-Hdbk 5E: Metallic Materials and Elements for Aerospace Vehicle Structures (1988)
- [MIL17] MIL-Hdbk 17B: Plastics for Aerospace Vehicles. Vol I "Reinforced Plastics"; Vol. II; Vol. III "Utilization of Data." Dep. of Defence (DOD), USA
- [Moh82] *Mohr, O.*: Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre. Civilingenieur XX VIII (1882), 113-156
- [Mos92] *Moser, K.*: Faser-Kunststoff-Verbund. VDI-Verlag, Düsseldorf 1992.
- [Nah86] *Nahas, N.M.*: Survey of Failure and Post-Failure Theories of Laminated Fiber-Reinforced Composites. J. of Composites Technology & Research, Vol. 8, No. 4, 1986, 138-153
- [Nai93] *Nairn, J.A., Shoufeng H. and Bark J.S.*: A critical Evaluation of Theories for Predicting Microcracking in Composites. J. o. Materials Science 28 (1993), 5099 - 5111.
- [Nai94] *Nairn, J.A., and Hu, S.*: Matrix microcracking; Damage Mechanics of Composite Materials, (1994) by Elsevier Science B.V., 187 ff

- [Nak89] Nakayasu, H., Maekawa, Z. and Rackwitz, R.: Reliability -oriented Materials Design of Composite Materials, Proc. (A.H.-S. Ang, et al. ed.) 5th ICOSSAR'89, San Francisco, Aug. 7-11, 1989, ASCE, New York, 1990, .2095-2098
- [Nay77] Narayanaswami, R. and Adelman, H.M.: Evaluation of the Tensor Polynomial and Hoffmann Strength Theories for Composite Materials. J. of Comp. Mat. 11 (1977), 12 pages (F_{12} -Problem)
- [O'Br92] O'Brien, T.K. and Salpekar, S.A.: Scale Effects on the Transverse Tensile Strength of Graphite/Epoxy Composites, Composite Materials: Testing and Design (11. Konferenz) ASTM STP 1206 (1992), 23-52
- [Ogi85] Ogin, S.L. and Smith, P.A.: Fast Fracture and Fatigue Growth of Transverse Ply Cracks in Composite Laminates, Scripta Metallurgica, v19, 1985, p779
- [Owe78] Owen, M.J. and Griffiths, J.R.: Evaluation of Biaxial Stress Failure Surfaces for a Glass Fabric Reinforced Polyester Resin under Static and Fatigue Loading. J. of Materials Science 13 (1978), 1521-1537
- [Owe81] Owen, M.J. and Rice, D.J.: Biaxial Strength Behavior of Glass-Reinforced Polyester Resins, Composite Materials: Testing and Design (6.Konferenz) ASTM STP 787 (1981), 124-144
- [Owe81] Owen, M.J. and Rice, D.J.: Biaxial Strength Behavior of Glass-Reinforced Polyester Resins, Composites 12 (1981), 13-26
- [Pag68] Pagano, N.J.; Halpin, J.C.: Anisotropic Bodies; Journal of Composite Materials 2 (1968) 1, S. 18 ff
- [Par78] Parvizi, A., Garrett, K.W. and Bailey, J.E.: Constrained Cracking in Glass Fibre - Reinforced Epoxy Cross Ply Laminates, J. Mats. Sci., v13, 1978, p195
- [Pau61] Paul, B.: A Modification of the Coulomb Mohr Theory of Fracture. J. of Applied Mechanics (1961), 259-268
- [Pau68] Paul B.: Macroscopic Criteria for Plastic Flow and Brittle Fracture; Fracture, Liebowitz, H. ed, Academic Press, 1968, Vol. III, Chapter 4, 313-495
- [Pau68] Paul, B.: Generalized Pyramidal Fracture and Yield Criteria. Int. J. Solids Struct. 1968, pp. 175-196
- [Pes92] Pestel, E. und Wittenburg J.: Technische Mechanik, Bd. 2, Festigkeitslehre. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992
- [Pet87] Peters, P.W.M.: Die Festigkeit von Glas-, Aramid- und Kohlenstoff-Epoxid senkrecht zur Faser. Vortrag, 21. AVK-Tagung, Mainz 1987, 30.1-30.8
- [Pip70] Pipes, R.B. and Pagano, N.J.: Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension, Journal of Composite Materials 4 (1970), 538-548
- [Pip73] Pipes, B.R. and Cole, B.W.: On the Off-Axis Strength Test for Anisotropic Materials. Journal of Composite Materials 7 (1973), 246-256
- [Pli94] Plica, S. und Rackwitz, R.: Reliability of Laminated Structures by an Energy Based Failure Criterion. Symposium IFIP, WG 7.5, Assisi, 7.-9. Sept. 1994. Conference Handbook
- [Pli95] Plica, S.: Zum Einfluß der Bauteilgröße auf die Zuverlässigkeit von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund. Bericht 7/95 aus dem Konstruktiven Ingenieurbau. Diss. TU-München, 1995
- [Poh94] Pohl, M.: Untersuchung des Puckschen "Wirkebene-Festigkeitskriteriums" und zweier verbesserter Testanpassungen im (σ_2, τ_{21}) - und (σ_2^Z, σ_3^Z) -Bereich. Studienarbeit, Univ. d. Bundeswehr München, Mai 1994
- [Pou95] Poutet, E.: Entwicklung eines Versuchs zur Bestimmung des Bruchwinkels von ZFB in UD-FKV (unter Quer/Längs-Schub- und Quer-Druckbeanspruchung). Studienarbeit am IKV, RWTH Aachen, 1995
- [Pro65] Protasov, V.D. and Kopnov, V.A.: Polymer Mechanics 1 (1965) 5, S. 26
- [Puc66] Puck, A.: Zur Beanspruchung und Verformung mehrschichtiger Verbundstoff-Bauelemente aus Glasseidensträngen und Kunststoff, Diss. TU Berlin, D83, 1966

- [Puc67] Puck, A.: Zur Beanspruchung und Verformung von GKF-Mehrschichtverbund-Bauelementen. Teil 1-3. Kunststoffe Bd. 57, 1967. S. 284-293, S. 573-582, S. 965-973.
- [Puc68] Puck, A.: Das "Knie" im Spannungs-Dehnungs-Diagramm und Rißbildung bei Glasfaser/Kunststoffen. Kunststoffe 58 (1968), 886-893
- [Puc69] Puck, A. und Schneider, W.: On Failure Mechanisms and Failure Criteria of Filamentwound Glass-Fibre/Resin Composites. Plast Polym. (1969), 33-43
- [Puc69] Puck, A.: Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung. Kunststoffe Bd. 59, 1969. S. 780-787
- [Puc82] Puck, A. und Schürmann, H.: Die Zug/Druck-Torsionsprüfung an rohrförmigen Probekörpern. Kunststoffe Bd. 71 (1982). S. 554-561
- [Puc92a] Puck, A.: Praxisgerechte Bruchkriterien für hochbeanspruchte Faser-Kunststoffverbunde. Kunststoffe 82 (1992) 2, S. 149-155 (Fracture Criteria for highly Stressed Fibre Plastics Composites which Meet Requirements of Design Practice. Kunststoffe German Plastics 82 (1992) 2, p. 36-38)
- [Puc92b] Puck, A.: Faser-Kunststoff-Verbunde mit Dehnungs- oder Spannungs-Kriterien auslegen? Kunststoffe 82 (1992) 5, S. 431-434 (Should Fibre-Plastics Composites be Designed with Strain or Stress Criteria? Kunststoffe German Plastics (1992) 5, p. 34-36)
- [Puc92c] Puck, A.: Ein Bruchkriterium gibt die Richtung an. Kunststoffe 82 (1992) 7, S. 607-610 (A failure criterion shows the Direction - Further Thoughts on the Design of Laminates -. Kunststoffe German Plastics 82 (1992) 7, p. 29-32)
- [Puc92d] Puck, A.: Konstruieren mit faserverstärkten Kunststoffen. Vorlesungsskriptum der Gh Kassel, WS 1990/91
- [Puc93] Puck, A.: Physikalisch begründete 3D-Bruchkriterien für UD-Verbunde. Vortrag, Arbeitskreis "Neue Bruchkriterien", AG Ingenieurmathematik, Universität Gh Kassel, 2.6.1993.
- [Puc96a] Puck, A.: Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten (Modelle für die Praxis). Hanser Verlag, München/Wien, 1996
- [Puc96b] Puck, A. and Schürmann, H.: Failure Analysis of FRP Laminates by Means of Physically Based Phenomenological Models. Special Issue of Comp. Sc. and Techn. (1997)
- [Pur81] Purslow, D.: Some Fundamental Aspects of Composite Fractography, Composite 12 (1981), 241-247
- [Rac78] Rackwitz, R.; Fiessler, B.: Structural Reliability under Combined Random Load Sequences. Comp. & Struct., 9, (1978), 484-494
- [Rac83] Rackwitz, R.: Predictive Distribution of Strength under Control, Materials & Structures 16, 94, 1983, pp.259-267
- [Rac85] Rackwitz, R.: Klassifizierungsprüfungen (Classification Tests), Berichtsband zum DIN-Kolloquium "Grundlagen für die Überwachung von Baustoffen und Bauteilen", 16.9.1985, München
- [Rac87] Rackwitz, R. and Cuntze, R.: Formulations of Reliability-oriented Optimization, Engineering Optimization, 11, 1987, pp.69-76
- [Rac87] Rackwitz, R.: Wahrscheinlichkeit und Statistik im konstruktiven Ingenieurbau, Vorlesungsskriptum, Technische Universität München, 1987/88/89
- [Rac90] Rackwitz, R.: Grundlagen der Theorie der Tragwerkszuverlässigkeit, Fachveranstaltung "Haus der Technik", Jülich, 17.5.1990, pp. 1-33
- [Raj90] Raju, I.S., Foye, R.L. and Avva, V.S.: A Review of the Analytical Methods for Fabric and Textile Composites. Proceedings of the Indo-U.S. Workshop on Composites for Aerospace Application, Part I, July 1990, Bangalore, 129-159
- [Raj93] Rajapakse, Y.P.S.: Mechanics of Thick Composites. YDS., ASME-AMD, New York, June 1993

- [Red93] Reddy, Y.S. and Reddy, J.N.: Three-Dimensional Finite Element Progressive Failure Analysis of Composite Laminates under Axial Extention. J. of Comp. Techn. & Res. 15 (1993), 73-87
- [Rhe95] Rhee, K.Y. and Pae, K.D.: Effects of Hydrostatic Pressure on the Compressive Properties of Laminated 0° Unidirectional Graphite Fiber/Epoxy Matrix Thick Composite. J. of Comp. Mat. 29 (1995), 1295
- [Roh93] Rohwer, K.: Computational Models for Laminated Composites Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 17 (1993), 323-330
- [Ros49] Ros, M. und Eichinger, A.: Die Bruchgefahr fester Körper bei ruhender Beanspruchung. Bericht Nr. 172 der Eidgenössischen Materialprüfanstalt Zürich, Zürich 1949
- [Rot77] Roth, E.: Schwindung von ungesättigten Polyesterharzen. Dissertation, RWTH Aachen, 1977
- [Row85] Rowlands, R.E.: Strength (Failure) Theories and their Experimental Correlation, in Handbook of Composites, Vol. 3, Failure Mechanics of Composites, edited by G.C. Sih and A.M. Skudra, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 71-125
- [Sch74] Schneider, W.: Mikromechanische Betrachtung von Bruchkriterien unidirektional verstärkter Schichten aus Glasfaser/Kunststoff. Diss. TH Darmstadt 1974
- [Sch75] Schneider, W. und Bardenheier, R.: Versagenskriterien für Kunststoffe. Z. f. Werkstofftechnik 6 (1975), 269-280 und 339-348
- [Sch89] Schürmann, H.: Zur Erhöhung der Belastbarkeit von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden durch gezielt eingebrachte Eigenspannungen; VDI Fortschrittberichte Reihe 1 Nr. 170, 1989
- [Sen93] Senor, D.J. and Peddicord, K.L.: High Fibre Volume Fraction Metal Matrix Composites Cast under Bi-Dimensional Compression. Journal of Composite Materials 27 (1993), 1312-1325
- [Shi92] Shin, E.S. and Pae, K.,D.: Effects of Hydrostatic Pressure on In-Plane Shear Properties of Graphite/Epoxy Composites. J. of Comp. Mat. 26 (1992), 828 - 867
- [Sih85] Sih, G.C. and Skudra, A.M.: Failure Mechanics of Composites, Handbook of Composites, Vol. 3, Elsevier pub., 1985
- [SMH95] Structural Materials Handbook. Chapter 11 "Strength Prediction & Failure Criteria", 1-14; Chapter 7 "Test Methods and Standards", 1-23, ESA PSS-03-203, Noordwijk
- [Ste96] Stellbrink, K.K.U.: Micromechanics of Composites. Hanser, München/Wien 1996
- [Sto61] Stowell, E.Z. and Lin, T.S.: On the Mechanical Behavior of Fibre-Reinforced Crystalline Materials. J. Mech. Phys. Solids 9 (1961), 242-260
- [Swa87] Swanson, S.R.: Failure of carbon/epoxy lamina under combined stress; Journal of Composite Materials 21 (1987) 7, S. 619-630
- [Sza84] Szabó, I.: Einführung in die technische Mechanik. Springer, Berlin 1984
- [Tal94] Talreja, R. (Hrsg.): Damage Mechanics of Composite Materials. Elsevier, Amsterdam/London/New York/Tokyo, 1994
- [Tan94] Tan, S.C.: Stress Concentrations in Laminated Composites. Techn. Publishing Comp., Basel, 1984
- [Tar81] Tarnopolskii, Y.M. and Kincis, T.: Static Test Methods for Composites. Van Nostrand Reinhold, New York, 1981
- [Ten78] Tennyson, R.C., Mac Donald, D. and Nanyaro, A.P.: Evaluation of the Tensor Polynomial Failure Criterion for Composite Materials, Journal of Composite Materials 12 (1978), 63-75
- [Ten82] Tennyson, R.C., Wharram, G.E. und Elliot, G.: Application of the Cubic Strength Criterion to the Failure Analysis of Composite Laminates. In Fracture of Composite Materials, editors G.C. Sih, V.P. Tamuzs, Martinus Nijhoff Publishers - The Hague/Boston/London (1982), 53-66
- [The92] Theocaris, P.S.: The Symmetric Ellipsoid Failure Surface for the Transversely-isotropic Body. Acta Mechanica 92 (1992), 35-60